
Numerische Lösung der Flachwassergleichung mit Hilfe der Methode der Finiten Massen

Gabriele Erhardt



München 2007

Numerische Lösung der Flachwassergleichung mit Hilfe der Methode der Finiten Massen

Gabriele Erhardt

Dissertation
an der Fakultät für Physik
der Ludwig–Maximilians–Universität
München

vorgelegt von
Gabriele Erhardt
aus Stuttgart

München, im März 2007

Erstgutachter: Prof. Dr. R. Sausen

Zweitgutachter: Priv.-Doz. Dr. H. Weber-Philipp

Tag der mündlichen Prüfung: 13.Juni.2007

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	vii
1 Einleitung	1
2 Methode der Finiten Massen	6
2.1 Methode der Finiten Massen nach H. Yserentant	6
2.1.1 Mathematische Formulierung: die Formfunktion ψ	6
2.1.2 Dichte, Massenanteil und Geschwindigkeit	8
2.1.3 Energie- und Masseerhaltung	10
2.1.4 Der Clou an der Methode	10
3 Methodik	12
3.1 Flachwassergleichungen (FWG)	12
3.1.1 Phasengeschwindigkeit	14
3.1.2 Strömungen über Hindernisse	14
3.2 Adaption der Methode der Finiten Massen auf die eindimensionale FWG .	15
3.2.1 Berechnung der Gleichung mit Hilfe der Methode der Finiten Massen	16
3.3 Numerische Adaption	33
3.3.1 Verlet-Zeitschema	33
3.3.2 Impulsaustausch zwischen den Teilchen	34
3.3.3 Bestimmung der optimalen Anzahl und Anfangsgröße der Masse- päckchen	35
3.3.4 Berechnung der optimalen Repräsentation der gewünschten An- fangsbedingungen im simulierten Experiment	36
3.3.5 Geschwindigkeit des Algorithmus	37
3.4 Beschreibung des Vergleichsmodells	38
4 Experimentdesign und Simulation	40
4.1 Dimensionierung des Problems	40
4.1.1 Wahl des Versuchsaufbaus	40
4.2 Verschiedene Konstellationen	41
4.2.1 Zerfließen eines Wasserberges	41
4.2.2 Sinusförmige Oberfläche	51
4.2.3 Orografie	54

5	Bewertung der Methodik	60
5.1	Adaption und Implementierung	60
5.2	Diskussion	60
6	Zusammenfassung & Ausblick	63
A	Integralberechnung mit Hilfe von Stützstellen	67
B	Impulsaustauschparameter δ: Impulserhaltung	69
C	Methode des Steilsten Gradienten	71
	Abkürzungen	73
	Abbildungsverzeichnis	75
	Tabellenverzeichnis	76
	Literaturverzeichnis	77

Kurzfassung

Die vorliegende Dissertation beschäftigt sich mit der Methode der Finiten Massen, einem rein Lagrangeschen Advektionsverfahren, das im Hinblick auf den möglichen Einsatz im dynamischen Kern eines Klimamodells getestet werden soll. Dies geschieht anhand der eindimensionalen Flachwassergleichung. Üblicherweise wird in solch einem Kern mit Eulerschen Verfahren gearbeitet. Lagrangesche Methoden wiederum haben sich bereits bei Transportschemata bewährt, weil sie sowohl die Konzentrationen als auch die Massenerhaltung garantieren und positiv definit sind. Insofern wäre es wünschenswert, auch einen vollständig auf Lagrangescher Basis aufgebauten dynamischen Kern zu implementieren. Die Methode der Finiten Massen, die auf der Diskretisierung der vorhandenen Masse in einzelne Massepakete basiert, wird in dieser Arbeit zur Lösung der Flachwassergleichungen im Eindimensionalen verwendet. Dabei steht die Adaption der Methode an die Flachwassergleichungen und deren qualitative Simulationsergebnisse im Vordergrund. Dies geschieht mittels der Ausnutzung der Konstanz der Dichte im Flachwassersystem, so dass die Flachwassergleichungen (bestehend aus zwei Gleichungen) auf eine Gleichung reduziert werden. Dabei wird die Höhenkoordinate des Flachwassersystems auf die Methode der Finiten Massen-Dichte transformiert. Diese Dichte wiederum ist eine Funktion der Masseteilchenschwerpunkte und -größen. Als numerischer Versuchsaufbau wurde ein Becken mit periodischen Randbedingungen gewählt, in dem einige Strömungsversuche, teilweise mit Orografie, simuliert wurden.

Das auf der Methode der Finiten Massen basierende Modell reproduziert wesentliche Eigenschaften des Flachwassersystems. Die simulierte Phasengeschwindigkeit stimmt bis auf eine Abweichung von 1.9% mit der analytischen Lösung überein. Unter bestimmten Voraussetzungen war sogar eine Reduktion der Abweichung auf 0.5% möglich.

Ferner ist das System energieerhaltend. Nur die Parametrisierung eines Impulsaustausches verletzt die Energieerhaltung jedoch unter 0.006% über den Simulationszeitraum.

Die Simulationen bei sub- und superkritischem Anströmen eines Berges zeigten eine gute Übereinstimmung der Wellenausbreitung mit der Theorie. Ferner konnte der Hydraulische Sprung im Experiment gezeigt werden.

Zu Evaluierung des Verhaltens des neu entwickelten Modells wurde das am NCAR entwickelte Modell MPDATA, ein eulersches, hydrostatisches Modell, herangezogen. Der Vergleich mit dem Modell der Methode der Finiten Massen lieferte keine Abweichungen über den Simulationszeitraum; auch entwickelten beide Modelle dieselbe Ausbreitungsgeschwindigkeit des Signals.

Aufgrund dieser Ergebnisse ist davon auszugehen, dass die wesentlichen dynamischen Prozesse im Modell richtig erfasst werden. Das neue Lagrangesche Modell ist damit als ein geeignetes Werkzeug für den Einsatz in der Atmosphärenphysik zu betrachten.

Kapitel 1

Einleitung

Klimamodelle entstanden aus den Modellen, die für die Wettervorhersage seit etwa 1940 entwickelt wurden. Dabei war Vilhelm Bjerknes (1862-1951) der erste, der erkannte, dass die Wettervorhersage ein Problem der Mathematik und Physik ist. Heutige meteorologische Modelle bestehen aus verschiedenen Komponenten, welche das Klimasystems beschreiben. Wichtige Teilkomponenten des Klimasystems Atmosphäre sind die Dynamik und die Physik. Unter der Physik versteht man im meteorologischen Sprachgebrauch subskalige Prozesse, welche an turbulente und konvektive Transporte, an Kondensation, Strahlung und Feuchte gekoppelt sind. Diese Prozesse nehmen entscheidenden Einfluß auf die globale Zirkulation, werden allerdings aufgrund ihrer charakteristischen Skala nicht explizit im Modell aufgelöst, sondern in Form von Parametrisierungen berücksichtigt. Unter der Dynamik hingegen versteht man den adiabatischen Teil eines Atmosphärenmodells, welcher im sog. dynamischen Kern realisiert ist.

Globale Modelle der Allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre basieren auf den „primitiven“ Gleichungen¹. Eine ganz einfache Modellatmosphäre erhält man, wenn man die aus der Navier-Stokes-Gleichung abgeleiteten Flachwassergleichungen für die Beschreibung der Dynamik verwendet. Eine stabil geschichtete Atmosphäre kann nämlich als ein System aus mehreren Flachwasserschichten dargestellt werden. Ferner haben die Flachwassergleichungen bei der Entwicklung eines neuen dynamischen Kerns den Vorteil, dass sie sowohl einfach genug als auch ausreichend komplex sind, um das numerische Verfahren zu testen und bieten zusätzlich den Vorteil, dass nicht-triviale analytische Lösungen existieren.

Bei der Entwicklung von numerischen Verfahren zur Lösung der Modellgleichungen müssen folgende Kriterien beachtet werden:

- Konvergenz: Bei größerer Auflösung des Systems, z.B. bei Verringerung der Zeitschrittgröße sollten die Simulationsergebnisse gegen die analytischen konvergieren.
- Erhaltungseigenschaften: Da gerade in der Klimaforschung lange Integrationszeiten verwendet werden, sollte hier speziell darauf geachtet werden, dass die wichtigsten Integraleigenschaften des kontinuierlichen Systems nicht verletzt werden, wie z.B. die Energie- und Masseerhaltung.

¹„Primitiv“, da diese Gleichungen aus den ersten physikalischen Prinzipien hergeleitet und (fast) frei von Annahmen sind.

Zur Untersuchung bestimmter Aspekte eines Klimamodells werden spezielle Module (z.B. ein Chemiemodul zur Ozonberechnung) an das Allgemeine Zirkulationsmodell gekoppelt. Den Transport von Spurenstoffen, sog. Tracern², der auf das von der Dynamik erzeugte Windfeld zugreift, regelt das sogenannte Transportschema. Dieses Schema sollte auch bei inhomogenen Verteilungen mit starkem Gradienten numerisch stabil bleiben.

Für die Beschreibung der Bewegung von Teilchen im Raum gibt es zwei unterschiedliche Arten der Betrachtungsweise, die als Formulierung nach Euler oder Lagrange bezeichnet werden. Bei einer Beschreibung nach Lagrange bewegt sich der Beobachter mit dem bewegten Körper (hier z.B. dem Spurenstoff) mit, im Gegensatz zur Eulerschen Betrachtung, bei der der Beobachter ortsfest ist.

Der klassische Ansatz zur Berechnung des Spurenstofftransportes benutzt Eulersche Methoden. Diese Methoden berechnen die Konzentrationen der Spurenstoffverteilungen auf einem das Modellgebiet überdeckendem Gitter. Durch Lösung der entsprechenden Differenzialgleichungen in diskreten Zeitschritten erfolgt die Berechnung des Transports. Zu den heute gängigen Eulerschen Verfahren zählt die Methode der Finiten Volumen (FVM³), die den Raum in einzelne Zellen unterteilt und dann die Flüsse durch diese betrachtet. Ebenso gehört dazu die Methode der Finiten Elemente (FEM⁴), die auf einer ähnlichen Idee aufbaut und mittlerweile in den Ingenieurwissenschaften nicht mehr wegzudenken ist. Spektrale Methoden basieren auf der Reihenentwicklung in einem vollständigen Funktionensystem. Beispielsweise werden Spurenstoffverteilungen auf einer Kugeloberfläche als Reihenentwicklung bezüglich einer Basis aus Kugelflächenfunktionen behandelt, die ab einer bestimmten Wellenzahl abbricht.

Zu den bekannten Problemen der traditionell eingesetzten Eulerschen Transportschemata zählen z.B. das Auftreten von negativen Konzentrationen und das Verhalten, bei starken Gradienten die Verteilung zu stark auszuglätten („numerische Diffusion“). Aus diesem Grund wurden weitere Verfahren entwickelt, wie z.B. das semi-Lagrange-Verfahren, eine Eulersche Methode, die vor jedem Zeitschritt den Herkunftspunkt der Trajektorie berechnet, deren Konzentration nach dem Zeitschritt im betrachteten Gitterpunkt liegt. Diese Berechnung von Rückwärtstrajektorien sind im Allgemeinen numerisch stabil. Die Qualität des semi-Lagrangeschen-Advektionsschema hängt jedoch wesentlich vom verwendeten Interpolationsverfahren ab, mit dem die Spurenstoffkonzentration am Trajektorienherkunftspunkt bestimmt wird. Auch dieses Verfahren wurde mit der Zeit erweitert, als Beispiel sei hier das Lin-Rood-Schema erwähnt (Lin und Rood, 1996; Lin und Rood, 1997), welches masseerhaltend und positiv definit, jedoch diffusiv ist. In der Literatur werden vielfach Modellvergleiche zwischen Zirkulationsmodellen mit Euler-Advektion und semi-Lagrangeschen-Ansätzen angesprochen sowie Spektralmodelle mit Gitterpunktsansätzen verglichen. Beispiele dazu geben z.B. Williamson et al. (1998) sowie Chen und Bates (1996), welche Ergebnisse von Langzeitsimulationen eines Euler- und semi-Lagrange-Modells gegenüberstellten (Chen et al., 1997).

Speziell bei Gitterpunktsmodellen muss zusätzlich sichergestellt werden, dass innerhalb eines Rechenschritts eine Feldvariable nicht weiter als ein Gitterintervall advehiert wird. Dieses sogenannte Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)-Kriterium beschränkt bei vorgegebe-

²Spurengase

³von engl. Finite Volume Method

⁴von engl. Finite Element Method

nem Gitterabstand und maximaler Signalgeschwindigkeit den Zeitschritt, mit dem die Integration durchgeführt werden darf. Dabei ist zu beachten, dass das CFL-Kriterium nur dann erfüllt werden muss, wenn die Modellgleichungen in der Eulerschen Form geschrieben werden, wobei die totale Ableitung nach der Zeit durch den partiellen (ortsfesten) und advektiven Anteil ersetzt wird.

Verwendet man also Verfahren, die auf der Lagrangeschen Sichtweise beruhen, so muss dieses Stabilitätskriterium nicht beachtet werden. Auch treten andere Probleme in weitaus geringerem Maße oder gar nicht auf. Da das Advektionsschema nicht die Konzentrationen selbst ändert, sondern nur den Ort der Konzentrationen, also die Positionen der Spurenstoffe im Raum, ist es strikt masseerhaltend und numerisch nicht diffusiv. Diesen Vorteil hat sich z.B. das Chemie-Transportmodul STOCHEM zueigen gemacht (Stevenson et al., 1998).

Das am DLR-Institut für Physik der Atmosphäre entwickelte Transportschema ATTILA (Reithmeier und Sausen, 2002) ist ein weiteres Beispiel für eine rein Lagrangesche Advektion. Es wurde im Rahmen der Dissertation (Reithmeier, 2001) entwickelt und läuft online im Klimamodell ECHAM4 (Roeckner et al., 1996). Mittlerweile wurde es auch als Modul an das ECHAM5/MESSy-Modell gekoppelt (Jöckel et al., 2004; Traub, 2004).

Ein großer Nachteil bleibt nach wie vor die Inkonsistenz zwischen dem Transportschema, bei dem sich solche Lagrangesche Methoden bewährt haben, und dem dynamischen Kern, bei dem zumeist spektrale Verfahren oder klassische Eulersche Methoden verwendet werden. Diese äußert sich hauptsächlich in sehr zeitaufwendigen Umrechnoperationen vom einen ins andere Bezugssystem.

Das Ziel ist es nun, ein Lagrangesches System zu kreieren, so dass der dynamische Kern und der Transport von Spurenstoffen mit derselben Methode berechnet werden.

In der vorliegenden Arbeit sollen nun die ersten Schritte präsentiert werden, solch einen vollständig Lagrangeschen Kern zu entwickeln, um ein im selben Referenzraum operierendes System (dynamischer Kern + Transportschema) zu erhalten. Die Basis hierfür bildet die (rein) Lagrangesche Methode der Finiten Massen, die innerhalb der letzten 10 Jahre von H. Yserentant und Mitarbeitern (Gauger, Leinen und Yserentant, 2000) entwickelt wurde und bereits in einigen mathematisch orientierten Dissertationen angewendet wurde (Sautter, 2004; Langmann, 2004), jedoch niemals im Rahmen der Atmosphärenphysik eingesetzt wurde. Im Hinblick auf die zukünftige Verwendung in einem dynamischen Kern wird die Methode der Finiten Massen auf die eindimensionale Flachwassergleichung angewendet und Ergebnisse zu Simulationen präsentiert.

Zwei grundlegende Probleme werden in dieser Arbeit besprochen: die Umsetzung und die Evaluation der Methode der Finiten Massen. Als Evaluationskriterien werden die Erhaltungssätze, Musterlösungen und ein Vergleichsmodell verwendet.

Insofern bildet die Adaption der Methode der Finiten Massen einen wesentlichen Bestandteil dieser Arbeit. Als Testsystem wurden die Flachwassergleichungen verwendet. Der Vorteil dieser Gleichungen liegt in der großen Zahl der vorhandenen Literatur zu diesem Themengebiet. Ferner muss jeder neue dynamische Kern eines Klimamodells die sog. „Shallow Water Test Cases“ nach (Williamson, Drake, Hack, Jakob und Swarztrauber, 1992) bestehen, um im Fachkreis der Entwickler von neuen dynamischen Kernen akzeptiert zu werden. Im Gegensatz zu den in diesem Artikel geforderten mehrdimensionalen Fällen wird diese Dissertation nur von eindimensionalen Problemen handeln und

auf die „Test Cases“ nur rudimentär in einem adaptierten Spezialfall (Kap. 4.2.2) eingehen. Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen wird der Weg über die Lagrangefunktion gewählt, wofür wiederum Formeln für die Energie aufgestellt werden müssen. Da in der Atmosphärenmodellierung wie auch in der Hydrodynamik eine Bodenstruktur eine bedeutende Rolle spielt, werden diese Bewegungsgleichungen ebenfalls für den Fall einer Orografie aufgestellt.

Somit ergeben sich folgende Fragestellungen, die im Verlauf dieser Arbeit beantwortet werden:

- Wie lässt sich die Methode der Finiten Massen auf die Flachwassergleichung adaptieren?
- Wie modifiziert eine Bodenstruktur die erhaltenen Bewegungsgleichungen?
- Wie genau wird die Phasengeschwindigkeit der Flachwasserwellen wiedergegeben?
- Wie verhält sich das Modell im Vergleich mit anderen Modellen?
- Bleibt die Energie in der Simulation erhalten?
- Gibt es ein Analogon zum CFL-Kriterium, das den Zeitschritt beschränkt?

Die vorliegende Dissertation ist in folgende Kapitel untergliedert: Kapitel 2 gibt eine Einführung in die von Harry Yserentant eingeführte Methode der Finiten Massen (Yserentant, 1997; Yserentant, 1999b; Yserentant, 1999a; Yserentant, 2000; Gauger et al., 2000), die sich dadurch kennzeichnet, dass nicht der Raum, sondern die vorhandene Masse in kleine Massepakete aufgeteilt wird. Diese sogenannten Masseteilchen können sich frei unter dem Einfluß von äußeren und inneren Kräften bewegen. Der prinzipielle Aufbau eines solchen Masseteilchens wie auch die dafür verwendete Formfunktion werden vorgestellt. Abschliessend werden noch einige grundlegende Eigenschaften wie die Masse- und Energieerhaltung angesprochen.

Kapitel 3 führt in die Methodik ein und beschreibt zuerst die Flachwassergleichungen und deren Charakteristika (Phasengeschwindigkeit, Überströmen von Hindernissen) und erklärt darauffolgend, wie die Methode der Finiten Massen⁵ zur Beschreibung der Flachwassergleichungen im eindimensionalen Fall genutzt werden kann. Ebenso wird erläutert, wie die Gleichungen modifiziert werden müssen, um eine Bodenorografie zu berücksichtigen. Im Anschluß daran werden einige Beispiele vorgeführt, die die prinzipielle Wirkungsweise der Bewegungsgleichungen anhand von einfachen Versuchsaufbauten erläutern.

Im darauf folgenden Abschnitt werden Probleme angesprochen, die sich bei der numerischen Umsetzung der Aufgabenstellung ergeben. Das Zeitintegrationsschema wird vorgestellt und der Grund für die Einführung eines Impulsaustauschparameters sowie dessen Wirkungsweise erklärt. Fragen über die Auflösung (die Anzahldichte der Masseteilchen, deren Größe), die Realisierung der Anfangsbedingungen und den dafür benötigten Rechenaufwand werden aufgeworfen und deren Lösungsmöglichkeiten angesprochen.

Kapitel 3 schließt mit der Beschreibung des von P. Smolarkiewicz eingeführten MPDATA-Modells (Smolarkiewicz und Margolin, 1998), welches zum Vergleich der numerischen Lösung der eindimensionalen Flachwassergleichung mit der Methode der Finiten Massen hergezogen wurde.

⁵im weiteren Verlauf dieser Arbeit durch FMM abgekürzt, von engl. Finite Mass Method

In Kapitel 4 wird dann der eigentliche Versuchsaufbau beschrieben. Verschiedene Anfangs- und Randbedingungen in einem eindimensionalen Flachwassersystem werden realisiert. Die Wahl der Zeitschrittgröße und der Größe des Impulsaustauschparameters werden anhand von verschiedenen Experimenten gerechtfertigt. Ebenso wird der Energieverlauf bei verschiedenen Ausgangskonfigurationen diskutiert. Hierbei werden auch orografieabhängige Versuche diskutiert, wie z.B. die Phänomene, die beim Überströmen eines Hindernisses auftreten. Das Überströmen einer Bodensenke wird mit dem MPDATA-Modell verglichen. Kapitel 5 zieht Rückschlüsse aus diesen Ergebnissen. Im Anschluß, Kapitel 6, folgt eine Zusammenfassung der Ergebnisse mit Ausblick auf die möglichen weiterführenden Entwicklungen des Modells.

Kapitel 2

Methode der Finiten Massen

2.1 Methode der Finiten Massen nach H. Yserentant

Die Methode der Finiten Massen wurde von Harry Yserentant et al. in zahlreichen Arbeiten Ende der 90er Jahre für kompressible Fluide entwickelt. Hierbei handelt es sich um eine rein Lagrangesche Methode zur numerischen Simulation von Fluiden, deren Vorteile sich in Energie-, Impuls-, Massen- und auch Vorticityverhaltung widerspiegeln.

Im Gegensatz zu anderen Lagrangeschen Methoden basiert die Methode der Finiten Massen (im weiteren Verlauf dieser Arbeit mit FMM bezeichnet) nicht auf der Aufteilung des Raumes in elementare Zellen, sondern auf der Zerlegung der vorhandenen Masse in einzelne Massepakete endlicher Ausdehnung, wobei jedes dieser Pakete eine endliche Anzahl von Freiheitsgraden innehat. Diese Massepakete, sogenannte Teilchen, bewegen sich unter dem Einfluß von inneren und äußeren Kräften und gehorchen den Gesetzen der Thermodynamik. Sie können sich ausdehnen, schrumpfen, drehen und sich gegenseitig durchdringen. Die interne Masseverteilung wird durch eine feste Formfunktion ψ beschrieben.

Obwohl es sich bei der Methode der Finiten Massen um eine rein Lagrangesche Methode handelt, ist sie in gewisser Weise eher mit Eulerschen Methoden, wie der Methode der Finiten Elemente (FEM¹) oder der Methode der Finiten Volumen (FVM²) verwandt als mit anderen Teilchenmethoden, weil sie, im Gegensatz zu vielen Teilchenverfahren, differenzierbare Funktionen statt diskrete Maße als Approximierende ergibt.

2.1.1 Mathematische Formulierung: die Formfunktion ψ

Hauptbestandteil der Methode der Finiten Massen ist eine stetig differenzierbare Formfunktion $\psi(\vec{y})$, mit $\psi(\vec{y}) \geq 0$, die die Masseverteilung innerhalb eines Teilchens beschreibt. Der Vektor \vec{y} ist hierbei der Körperkoordinatenvektor des Teilchens. Die Formfunktion $\psi(\vec{y})$ kann eine beliebige Funktion sein, welche die folgenden Kriterien erfüllt: Sie sei normiert

$$\int \psi(\vec{y}) \, d\vec{y} = 1, \tag{2.1}$$

¹ von engl. Finite Element Method

² von engl. Finite Volume Method

und der Ursprung des Körperkoordinatensystems liegt im Schwerpunkt des Teilchens

$$\int \psi(\vec{y}) \vec{y} \, d\vec{y} = 0, \quad (2.2)$$

und die Hauptträgheitsmomente des Referenzteilchens sind identisch.

$$\int \psi(\vec{y}) y_k y_l \, d\vec{y} = J \delta_{kl}, \quad (2.3)$$

wobei $y_{k,l}$ die Komponenten von \vec{y} darstellen.

Als Funktion $\psi(\vec{y})$ verwenden Yserentant et al. das Produkt aus einer eindimensionalen, stückweise polynomen Funktion $\tilde{\psi}(\vec{y})$ vor (d : Dimension)

$$\psi(\vec{y}) = \prod_{k=1}^d \tilde{\psi}(y_k). \quad (2.4)$$

In diesem Fall werden die Normierungsbedingungen (2.1) und (2.2) zu:

$$\int \tilde{\psi}(\xi) \, d\xi = 1 \quad (2.5)$$

$$\int \tilde{\psi}(\xi) \xi \, d\xi = 0 \quad (2.6)$$

und aus Bedingung (2.3) ergibt sich für J :

$$J = \int \tilde{\psi}(\xi) \xi^2 \, d\xi. \quad (2.7)$$

Als geeignete Wahl für die Funktion $\tilde{\psi}$ schlagen Yserentant et al. den B-Spline dritter Ordnung vor, der sehr schöne Approximationseigenschaften³ besitzt:

$$\tilde{\psi}(\xi) = \frac{3}{4} \begin{cases} 2(1+\xi)^3 & -1 \leq \xi \leq -\frac{1}{2} \\ 1 - 6\xi^2(1+\xi) & -\frac{1}{2} \leq \xi \leq 0 \\ 1 - 6\xi^2(1-\xi) & 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-\xi)^3 & \frac{1}{2} \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

für $|\xi| \leq 1$ und $\tilde{\psi}(\xi) = 0$ für $|\xi| > 1$. Siehe Abbildung 2.1.

Mit dieser Wahl von $\tilde{\psi}$ sind alle gewünschten Bedingungen erfüllt und die Konstante J aus (2.7) ergibt sich zu

$$J = \frac{1}{12}. \quad (2.9)$$

³Ein B-Spline n -ter Ordnung approximiert ein Polynom n -ter Ordnung exakt. Der gewählte B-Spline approximiert also bis dritten Ordnung exakt.

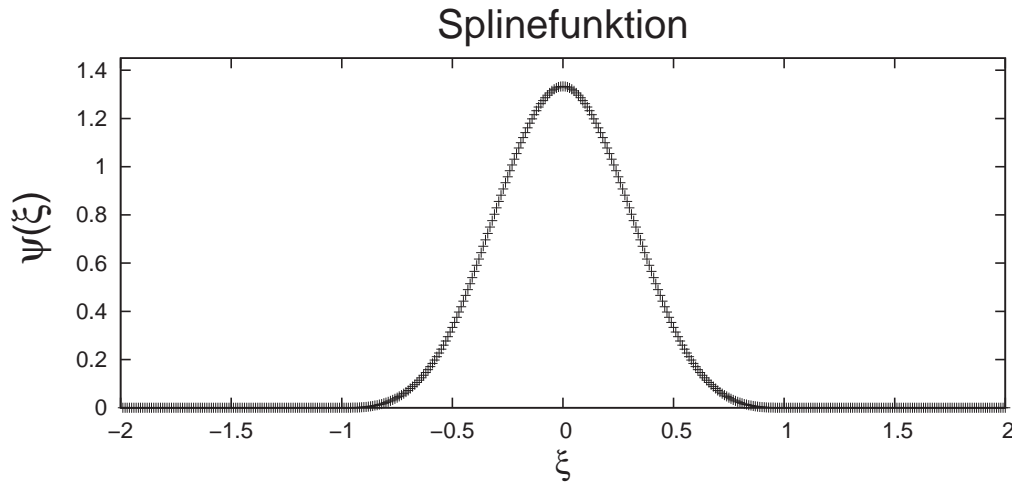


Abbildung 2.1: Darstellung der Splinefunktion in einer Dimension ($\psi(\xi) = \tilde{\psi}(\xi)$).

2.1.2 Dichte, Massenanteil und Geschwindigkeit

Für die Beschreibung der einzelnen Teilchen wird auf die bereits aus der Kontinuumsmechanik geläufigen Bezeichnungen zurückgegriffen. So wird durch $\vec{x}(t)$ jeder Punkt im Raum beschrieben (Ortskoordinatensystem). Die Punkte eines bestimmten Masseteilchens i kann man durch den Vektor zum Schwerpunkt $\vec{q}_i(t)$ und dem dazugehörigen Körperkoordinatenvektor \vec{y} beschreiben. Da sich das Teilchen im Laufe der Zeit verformen kann, wird dem Körperkoordinatenvektor eine Verformungsmatrix $\mathbf{H}_i(t)$ zugeordnet, die die zeitliche Verformung des Teilchens in Größe, Form und Orientierung im Raum beschreibt und damit auch die zeitliche Veränderung des Vektors \vec{y} charakterisiert, denn \vec{y} selbst ist zeitunabhängig. Abbildung 2.2 gibt den Aufbau eines solchen Teilchens wieder und zeigt, wie sich das Teilchen im Laufe der Zeit verändern kann.

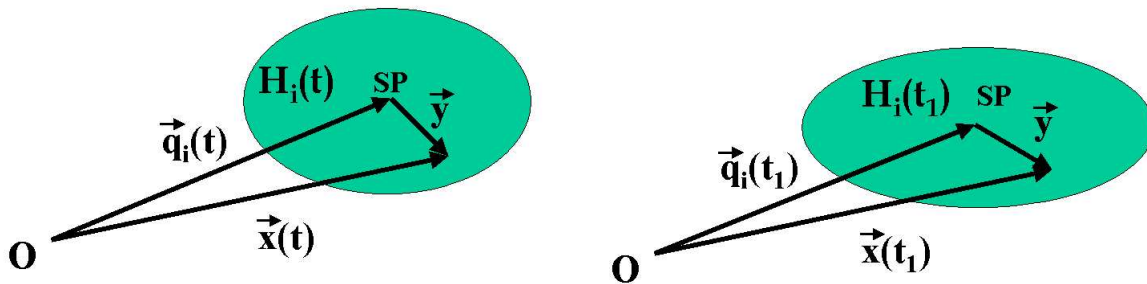


Abbildung 2.2: Aufbau eines Teilchens in 2 Dimensionen: Der Ortsvektor eines Punktes im Teilchen i ist durch die Summe aus Schwerpunktsvektor $\vec{q}_i(t)$ plus des Anteils der Verformungsmatrix $\mathbf{H}_i(t)$, die auf den Teilchenvektor \vec{y} wirkt, definiert. Das rechte Bild zeigt das Teilchen zu einem anderen Zeitpunkt ($t = t_1$).

Die einzelnen Punkte des Teilchens i bewegen sich entlang der Trajektorien:

$$t \rightarrow \vec{q}_i(t) + \mathbf{H}_i(t) \vec{y}, \quad \text{mit } |\mathbf{H}_i(t)| > 0 \quad (2.10)$$

Der zeitlich sich nicht verändernde Vektor \vec{y} lautet in Ortskoordinaten:

$$\vec{y} = \mathbf{H}_i^{-1}(t) (\vec{x} - \vec{q}_i(t)) \quad (2.11)$$

Bezeichnet man nun die Masse des Massepaketes i mit m_i und das von ihm eingenommene Volumen mit $V_i(t)$, so erhält man die Dichte eines Massepaketes

$$\varrho_i(\vec{x}, t) = \frac{m_i}{V_i(t)} \psi(\vec{y}), \quad (2.12)$$

oder mit (2.11) in Ortskoordinaten und mit $V_i(t) = |\mathbf{H}_i(t)|$

$$\varrho_i(\vec{x}, t) = \frac{m_i}{|\mathbf{H}_i(t)|} \psi\left(\mathbf{H}_i^{-1}(t)(\vec{x} - \vec{q}_i(t))\right). \quad (2.13)$$

Somit ergibt sich die Gesamtdichte als Superposition der Dichten der einzelnen Massepakete

$$\varrho(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\mathbf{H}_i(t)|} \psi\left(\mathbf{H}_i^{-1}(t)(\vec{x} - \vec{q}_i(t))\right). \quad (2.14)$$

Der Massenanteil χ_i , welcher das Verhältnis der Dichte eines Teilchens zur Gesamtdichte darstellt, ergibt sich zu:

$$\chi_i(\vec{x}, t) = \frac{m_i |\mathbf{H}_i(t)|^{-1} \psi\left(\mathbf{H}_i^{-1}(t)(\vec{x} - \vec{q}_i(t))\right)}{\varrho(\vec{x}, t)} \quad (2.15)$$

und stellt damit eine Partition der Eins dar:

$$\sum_{i=1}^N \chi_i = 1. \quad (2.16)$$

Die Geschwindigkeit des einzelnen Masseteilchens i erhält man durch Differentiation:

$$\vec{v}_i(\vec{x}, t) = \vec{q}_i'(t) + \mathbf{H}_i'(t) \vec{y} \quad (2.17)$$

Setzt man nun anstelle der Körperkoordinaten \vec{y} noch den obigen Ausdruck (2.11) ein, so lässt sich die Geschwindigkeit des einzelnen Massepäckchens in Ortskoordinaten ausdrücken:

$$\vec{v}_i(\vec{x}, t) = \vec{q}_i'(t) + \mathbf{H}_i'(t) \mathbf{H}_i^{-1}(t) (\vec{x} - \vec{q}_i(t)) \quad (2.18)$$

Mit Hilfe des Gesamtmassenflusses $\vec{j}(\vec{x}, t)$, der sich aus der Superposition der einzelnen Massenflussdichten $\vec{j}_i = \vec{q}_i v_i$ zusammensetzt,

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\mathbf{H}_i(t)|} \psi\left(\mathbf{H}_i^{-1}(t)(\vec{x} - \vec{q}_i(t))\right) \vec{v}_i(\vec{x}, t) \quad (2.19)$$

und des oben definierten Massenanteils (2.15) lässt sich das Geschwindigkeitsfeld des Flusses, der durch die Relation

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \varrho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) \quad (2.20)$$

gegeben ist, durch die Geschwindigkeiten der einzelnen Teilchen ausdrücken

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^N \chi_i(\vec{x}, t) \vec{v}_i(\vec{x}, t). \quad (2.21)$$

Zur Verifizierung der Ausdrücke sei auf (Yserentant, 2002) und auch auf (Yserentant, 2000) verwiesen.

2.1.3 Energie- und Masseerhaltung

2.1.3.1 Masseerhaltung

Da die Teilchenmassen aufgrund des Ansatzes erhalten bleiben, gilt durch das Superpositionsprinzip auch die Erhaltung der Gesamtmasse (siehe Gauger (2000)). Dieses Prinzip der Masseerhaltung, wonach von der Masse eines strömenden Fluids nichts verschwinden und auch keine neue Masse entstehen kann, wird von der Kontinuitätsgleichung formuliert. Sie bringt die zeitliche Änderung der Massedichte ϱ mit ihrem Fluß $\Phi = \varrho v$ in Zusammenhang und lautet in der in der Kontinuumsmechanik üblichen differentiellen Schreibweise

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} - \operatorname{div} \varrho \vec{v} = 0. \quad (2.22)$$

In der Methode der Finiten Massen ist diese nach Konstruktion erfüllt, wie in Gauger et al. (2000) beschrieben wird.

2.1.3.2 Energieerhaltung

Nach Gauger et al. (2000) gilt: Sind die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_i \ddot{q}_i &= F_i \\ J m_i \ddot{\mathbf{H}}_i(t) &= M_i \end{aligned}$$

für jedes einzelne Teilchen i erfüllt, so ist die Gesamtenergie Erhaltungsgröße (F_i ist hierbei die auf das Teilchen wirkende Kraft und M_i das Drehmoment.). Der Beweis hierfür ist in Abschnitt 3 von (Gauger et al., 2000) angegeben.

2.1.4 Der Clou an der Methode

In vielen Diskussionen auf Tagungen oder nach Vorträgen hat sich herausgestellt, dass die Methode der Finiten Massen mit den gewohnten Denkansätzen aus den klassischen Teilbereichen der Physik nicht in Einklang zu bringen ist, bzw. die Zuhörer immer wieder

am Verständnis scheitern lässt.

Häufig werden diese Schwierigkeiten erst bei weiterführenden Erläuterungen erkannt, wenn die zuerst unbewusst vorausgesetzten Konzepte zu Widersprüchen und damit zu Verständnislosigkeit führen. Deshalb sollte man die Methode möglichst unvoreingenommen und losgelöst von klassischen Denkmodellen als wirklich neuen Ansatz betrachten.

Besonders die in der Methode der Finiten Massen postulierten Eigenschaften der Massepakete, sich unabhängig voneinander bewegen und sich sogar gegenseitig durchdringen zu können, führt in Verbindung mit Wasser als flüssigem Medium oft zu Missverständnissen. Das Bild von Flüssigkeitsströmen, welche sich durchmischen und danach wieder vollständig voneinander trennen, drängt sich geradezu auf, entspricht aber natürlich nicht der physikalischen Realität. Da auf Basis einer solchen Vorstellung fast zwangsläufig falsche Schlussfolgerungen gezogen werden, ist es nützlich, sich immer wieder daran zu erinnern, dass die Methode der Finiten Massen ein rein mathematisches Hilfsmittel ist, um ein physikalisches Problem im Ergebnis zu beschreiben⁴. Um also unbewusste Verwechslungen zwischen mathematischer Modellbeschreibung und tatsächlichen physikalischen Vorgängen möglichst frühzeitig zu erkennen, mag es helfen, sich die Masseteilchen statt als „Wasserblasen“ als Körper aus fester, undurchdringlicher Materie (z.B. Granit) vorzustellen. Natürlich lassen sich die Flachwassergleichungen nicht auf ein System von Masseteilchen aus Granit anwenden, aber die Methode der Finiten Massen ließe sich ungeachtet ihrer in diesem Fall „unlogischen“ Postulate für die Lösung eines Problems aus solchen Teilchen verwenden.

Die Massepakete sind lediglich eine mathematische Darstellung, eine Art Transformierung eines physikalischen Problems in einen der N mathematischen Räume⁵, in dem das einzelne i -te Masseteilchen unter dem Einfluss der vorhandenen Kräfte steht. Die Reduktion auf die Wechselwirkungen der einzelnen Teilchen mit dem Gesamtfeld ist einer der zentralen Punkte in der Methode der Finiten Massen. Die Massepakete „spüren“ die Anwesenheit der anderen Teilchen nur durch dieses resultierende Gesamtfeld, nicht als realen physikalischen Wechselwirkungspartner. Deswegen können sie sich –virtuell– z.B. problemlos durchdringen.

Das Gesamtfeld wiederum ist eine reale Größe, vergleichbar mit den makroskopischen Größen in der Thermodynamik. Es kann z.B. das aus allen anwesenden Teilchen aufgespannte Geschwindigkeitsfeld sein, oder die Dichteverteilung (d.h. die Verteilung der realen Granitblöcke).

Mit der Methode der Finiten Massen wird die Gesamtinformation eines Systems auf einzelne für sich alleine wirkende mathematische Variablensätze (die Massepäckchen) aufgeteilt, für diese eine Beschreibung der Wechselwirkungen mit dem System aufgestellt und dann die Informationen aus den Einzelwechselwirkungen wieder zusammengeführt, um die Information über das tatsächliche physikalische Geschehen zu erhalten.

⁴Man denke hier z.B. an die Fourier-Zerlegung.

⁵Wobei hier nicht die streng mathematische Definition eines Raumes gemeint ist, wie z.B. in (Bronstein und Semendjajew, 1991), sondern eher das, was der mathematische Laie darunter versteht.

Kapitel 3

Methodik

3.1 Flachwassergleichungen¹

Die erste Hürde, die neue numerische Modelle in der Modellierung atmosphärischer Strömungen zu meistern haben, ist üblicherweise die Lösung der Flachwassergleichungen. Hierbei handelt es sich um ein einfaches, lineares Gleichungssystem einer inkompressiblen und reibungsfreien Strömung. Einerseits liegt der Vorteil in der Verwendung der inkompressiblen Flachwasseratmosphäre darin, dass das System hinreichend komplex ist, um vernünftige Aussagen über die physikalischen Prozesse zu treffen, andererseits handelt es sich hierbei um ein einfaches System zur Überprüfung der Verwendbarkeit neuer numerischer Methoden. Nach der Lösung der Flachwassergleichungen ist die Übertragung auf ein komplexeres Problem in der Regel ein relativ einfacher Schritt.

Die Flachwassergleichungen im Zweidimensionalen werden üblicherweise hergeleitet in der Form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u = -g \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

Hierbei werden die Windkomponenten v_x und v_y wie in der Meteorologie üblich mit u und v bezeichnet, g ist die Erdbeschleunigung, h die Wasserhöhe und f ist der Coriolisparameter.

In Abb. 3.1 ist der Aufbau des Flachwassersystems schematisch dargestellt. Zu beachten ist hierbei, dass sich die Höhe der Wasseroberfläche $h(x, y, t)$ aus der Höhe der Wassersäule $H(x, y, t)$ und der zugrunde liegenden Bodenorografie $h_b(x, y)$ zusammensetzt.

$$h(x, y, t) = H(x, y, t) + h_b(x, y) \quad (3.4)$$

¹Abgekürzt: FWG, in der Literatur auch mit SWE abgekürzt, von engl. Shallow Water Equations

Ferner ist zu beachten, dass das Flachwassersystem von einigen Bedingungen charakterisiert wird. So ist die Dichte ρ des Wassers² an jedem Ort konstant $\rho = \text{const.}$ ³ und das chemische Potential μ ist überall Null $\mu = 0$. Da keine der Variablen von der Höhe h abhängt, handelt es sich um eine barotrope Strömung. Ein typisches Merkmal für die Flachwassergleichungen ist also, dass sich immer die komplette Flüssigkeitssäule bewegt.

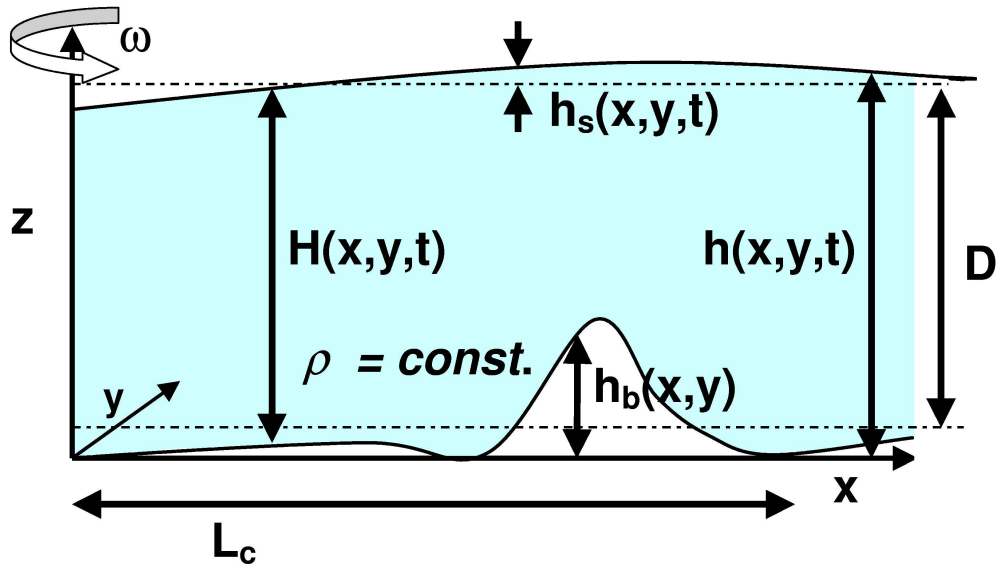


Abbildung 3.1: Aufbau des Flachwassersystems: Höhe der Wassersäule H und Höhe der Bodenstruktur h_b ergeben die Wasserhöhe h . Die durchschnittliche Höhe der Wassersäule ist D und die Amplitude der Wasserwellen h_s . L_c stellt eine charakteristische Länge dar. Im Flachwassersystem ist die Dichte ρ konstant.

Für Flachwasserwellen gelten ebenfalls einige Einschränkungen. Wenn D die durchschnittliche Höhe des Wasserbeckens und L_c eine charakteristische Länge (z.B. die Wellenlänge eines Signals) beschreibt, so muss diese Länge deutlich größer sein als die durchschnittliche Höhe des Wassertanks:

$$\frac{D}{L_c} \ll 1 \quad (3.5)$$

Ebenso muss die doppelte Amplitude der Änderung der Höhe der Wasseroberfläche h_s des Signals deutlich kleiner sein als die Höhe der Wassersäule H .

$$h_s \ll H \quad (3.6)$$

Üblicherweise spricht man von einem Flachwassersystem, wenn die Höhe der Wassersäule H um mindestens den Faktor 20 größer ist als die Auslenkung der Wasseroberfläche h_s .

²Wobei hier 'Wasser' stellvertretend für jede beliebige Flüssigkeit bzw. jedes beliebige Medium steht, in dieser Dissertation jedoch nur explizit Wasser betrachtet wird.

³Später, zur besseren Unterscheidung als $\tilde{\varrho}_{0,2}$ bezeichnet (s. Kap. 3.2.1.1)

3.1.1 Phasengeschwindigkeit

Die Phasengeschwindigkeit der Wellen der Flachwassergleichung für einen sinusförmigen Wellenansatz gehorcht der Beziehung⁴:

$$c_{\Delta\rho} = \bar{u} \pm \sqrt{g H \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1}}, \quad (3.7)$$

wobei \bar{u} die Fließgeschwindigkeit, g die Erdbeschleunigung, H die Wassertiefe (also die Höhe der Wassersäule) und ρ_1 und ρ_2 die Dichten der jeweilig angrenzenden Medien sind. Handelt es sich wie in den folgenden Betrachtungen um die Grenzfläche Luft (ρ_2) und Wasser (ρ_1) und es gilt somit $\rho_2 \ll \rho_1$, so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{g H} \quad (3.8)$$

Die Unabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Flachwasserwellen von der Wellenlänge ist eine grundlegende Eigenschaft des Flachwassersystems. Dies kann man auch bei Tsunamis auf dem freien Ozean beobachten: hier hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit nur von der Wassertiefe H ab und beträgt bei 5000 m Tiefe ca. 800km/h.

3.1.2 Strömungen über Hindernisse

Es gibt drei verschiedene Strömungszustände, die beim Überströmen eines Hindernisses auftreten können. Die die drei Fälle charakterisierende Größe ist hierbei die Froudezahl Fr . Sie gibt das Verhältnis zwischen der Geschwindigkeit eines Fluids und der Ausbreitungsgeschwindigkeit der linearen Flachwasserwellen an. Sie ist eine Möglichkeit, den Strömungszustand eines hydraulischen Regimes zu beschreiben:

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{g H}}, \quad (3.9)$$

wobei u die Geschwindigkeit des Wassers, g die Erdbeschleunigung und H die Höhe der Wassersäule darstellen.

Wenn Wasser über ein Hindernis strömt, so wirken im Wesentlichen zwei Kräfte: die Schwerkraft und die Trägheitskraft. Je nachdem, wie das Verhältnis zwischen Geschwindigkeit des Fluids und der Phasengeschwindigkeit ausfällt, unterscheidet man folgende Fälle:

- $u < \sqrt{g H}$ bzw. $Fr < 1$: Die Wellen können sich stromaufwärts und stromabwärts ausbreiten. Dieser Zustand wird als subkritisch bezeichnet. Beim subkritischen Fließen dominiert die Schwerkraft. Über dem Hindernis fließt das Wasser schneller, potenzielle Energie wird in kinetische Energie umgewandelt, die Dicke der Wasserschicht wird kleiner. Nach dem Hindernis wird die kinetische Energie zurück in potenzielle Energie transferiert.
- $u > \sqrt{g H}$ bzw. $Fr > 1$: Dieser Zustand wird superkritisch genannt. Die Fließgeschwindigkeit übersteigt jetzt die Ausbreitungsgeschwindigkeit, die Welle kann sich

⁴Siehe Herleitung z.B. (Holton, 1992), (Ettling, 1996)

daher nur stromabwärts ausbreiten. Beim superkritischen Fließen ist die Trägheitskraft dominierend. Kinetische Energie wird am Hindernis in potenzielle Energie und ab dem Gipfel wieder zurück in kinetische Energie umgewandelt.

- $u = \sqrt{gH}$ bzw. $Fr = 1$: Man spricht vom kritischen Fluß. Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit stimmt nun genau mit der Fließgeschwindigkeit überein. Wellen können sich nicht mehr gegen die Strömung fortpflanzen. Die stromaufwärts gerichtete Wellenfront bleibt an der Stelle der Störung „stehen“ (Analogie zur Schallmauer).
- $u = 0$ bzw. $Fr = 0$: Ruhender Strömungszustand. Eine Welle entsteht erst, wenn eine Störung auf das System wirkt (z.B. Stein fällt ins Wasser und es entstehen dabei Wellen, die sich kreisförmig in alle Richtungen ausbreiten). Der ruhende Strömungszustand ist ein Sonderfall des subkritischen Zustandes.

3.1.2.1 Hydraulischer Sprung

Wenn über dem Hindernis eine genügend starke Beschleunigung erreicht wird und eine genügend große Abnahme der Dicke der Wasserschicht erfolgt (wie bei großen Hindernissen möglich), kann ein Übergang von subkritischem zu superkritischem Fließen geschehen. Da nun das Wasser jenseits der Bergspitze superkritisch ist, beschleunigt es sich und stürzt den Hang hinunter. Weil auf der ganzen Strecke über dem Hindernis potenzielle Energie in kinetische verwandelt wird, werden große Geschwindigkeiten hangabwärts produziert. Die Flüssigkeit passt sich nach dem Hindernis durch einen hydraulischen Sprung wieder der Umgebung an und wechselt dadurch wieder zu subkritischem Fließen.

3.2 Adaption der Methode der Finiten Massen auf die eindimensionale FWG

In der vorliegenden Arbeit werden die Flachwassergleichungen ohne zusätzliche Kräfte, speziell ohne Corioliskraft betrachtet. Ferner lassen sich die drei Gleichungen (3.1), (3.2) und (3.3) bei Beschränkung auf eindimensionale Phänomene auf zwei reduzieren:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (3.11)$$

Gauger et al. (2000) zeigen, dass bereits durch den Ansatz der Methode der Finiten Massen die Kontinuitätsgleichung (Gl. 2.22) erfüllt ist. Aus diesem Grund braucht sie bei den folgenden Betrachtungen nicht berücksichtigt zu werden.

Mit der Definition der totalen Ableitung $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}$ lässt sich Gl.(3.10) zusammenfassen, so dass die zu betrachtende Gleichung im Lagrangeschen System lautet:

$$\frac{du}{dt} = -g \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (3.12)$$

In den folgenden Unterkapiteln wird für die Adaption der Methode der Finiten Massen auf die Flachwassergleichung (3.12) ein eindimensionales System der Länge L und der durchschnittlichen Höhe D der Wassersäule mit periodischen Randbedingungen betrachtet.

3.2.1 Berechnung der Gleichung mit Hilfe der Methode der Finiten Massen

Ziel ist es nun, die Methode der Finiten Massen auf die eindimensionale Flachwassergleichung anzuwenden. Für die einzelnen Massepakete sind also nur Bewegungen entlang der x -Achse möglich. Da diese sich unabhängig voneinander bewegen können, ist die eindimensionale FMM-Dichte $\varrho(x, t)$ je nach Verteilung der einzelnen Teilchen, in der Regel in jedem Punkt unterschiedlich. Die FMM-Dichte $\varrho(x, t)$ sollte nicht verwechselt werden mit der konstanten Dichte $\tilde{\varrho}_{0,2}$ des Wassers, die bei der Formulierung der Flachwassergleichungen angenommen wurde⁵.

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichung für die beiden Variablen der FMM, der Schwerpunktskoordinate q_i und der Größe \mathbf{H}_i des Teilchens i , wird auf die bekannte Methode des Lagrangeformalismus⁶ zurückgegriffen und als erstes die Lagrangefunktion \mathcal{L} aufgestellt. Um hierbei die in der potenziellen Energie benötigte Höhe h im Rahmen des eindimensionalen Methode der Finiten Massen-Formalismus darzustellen, wird die Höhe h auf die eindimensionale Dichte $\varrho(x, t)$ der FMM transformiert. Dies geschieht mittels einer impliziten Transformationsvorschrift, die im folgenden Paragraphen hergeleitet wird.

3.2.1.1 Berechnung der Höhe für die FWG mit Hilfe der FMM

Als Ausgangspunkt für die Methode der Finiten Massen im Eindimensionalen wird von Masseteilchen ausgegangen, die, jedes für sich, ihre Größe verändern können, dabei allerdings ihre ursprüngliche Form beibehalten. Für diesen Fall der forminvarianten Teilchen ergibt sich die in Kapitel 2.1.2 eingeführte Verformungsmatrix $\mathbf{H}_i(t)$ zu einer zeitabhängigen, reellen Funktion der Zeit, $\lambda_i(t)$, mal der Einheitsmatrix (\mathbf{E}). Da hier jedoch ein eindimensionales Problem betrachtet wird, sind auch die Teilchen eindimensional, so dass sich die Einheitsmatrix \mathbf{E} auf den Faktor 1 reduziert und man erhält:

$$\mathbf{H}_i(t) = \lambda_i(t) \mathbf{E} = \lambda_i(t) 1 = \lambda_i(t). \quad (3.13)$$

Für diese Konstellation lassen sich Determinante und Inverse von $\mathbf{H}_i(t)$ sehr einfach bestimmen:

$$|\mathbf{H}_i(t)| = \lambda_i(t) \quad \text{und} \quad \mathbf{H}_i^{-1}(t) = \frac{1}{\lambda_i(t)}$$

⁵Zur leichteren Unterscheidung der beiden Dichten wird die konstante, zweidimensionale Dichte $\tilde{\varrho}$ mit den Indizes '0,2' versehen.

⁶Ist für ein mechanisches System die Lagrangefunktion \mathcal{L} bekannt, so stellen die Lagrangeschen Gleichungen die Bewegungsgleichungen des Systems dar. Da zur Aufstellung der Lagrangefunktion die jeweilige an das System angepassten Energien benötigt werden, stellen diese resultierenden Gleichungen auch wieder das Flachwassersystem dar.

Damit lässt sich die eindimensionale Dichte $\varrho(x)$ aus (2.14) vereinfachen zu:

$$\begin{aligned}\varrho(x, t) &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\mathbf{H}_i(t)|} \psi\left(\mathbf{H}_i^{-1}(t)(x - q_i(t))\right) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\lambda_i(t)} \psi\left(\frac{1}{\lambda_i(t)}(x - q_i(t))\right)\end{aligned}\quad (3.14)$$

Die Einheit von $\varrho(x, t)$, die ja die Dichte der Massepäckchen, also die Häufung der Masse im Eindimensionalen darstellt, ergibt sich somit zu $[\varrho(x, t)] = \frac{kg}{m}$.

Möchte man nun die Höhe der Wassersäule $H(x)$ an jedem einzelnen Punkt x bestimmen, so muss man die eindimensionale Dichte $\varrho(x, t)$ durch die konstante, zweidimensionale Dichte $\tilde{\varrho}_{0,2}$ teilen.

Die zweidimensionale Dichte $\tilde{\varrho}_{0,2}$ ist nach den Flachwasserbedingungen konstant und setzt sich zusammen aus:

$$\tilde{\varrho}_{0,2} = \frac{M}{DL}, \quad (3.15)$$

wobei M die Gesamtmasse, D die durchschnittliche Wasserhöhe und L die Länge des betrachteten Systems ist (vergl. Abb. 3.1). Die Einheit der Dichte ergibt sich zu $[\tilde{\varrho}_{0,2}] = \frac{kg}{m^2}$.

Mit dieser Dichte lässt sich die Höhe der Wasseroberfläche $h(x, t)$ ohne Orografie, also für $h(x, t) = H(x, t)$, leicht berechnen:

$$\begin{aligned}h(x, t) &= \frac{\varrho(x, t)}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \\ &= \frac{1}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \sum_{i=1}^N \varrho_i(x, t) \\ &= \frac{1}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\mathbf{H}_i(t)|} \psi\left(\mathbf{H}_i^{-1}(t)(x - q_i(t))\right)\end{aligned}\quad (3.16)$$

Für $\mathbf{H}_i(t) = \lambda_i(t)$ ergibt sich somit:

$$h(x, t) = \frac{1}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\lambda_i(t)} \psi\left(\frac{1}{\lambda_i(t)}(x - q_i(t))\right) \quad (3.17)$$

Damit lässt sich z.B. das Analogon zur Druckgradientkraft, der Antrieb im eindimensionalen Flachwassersystem, berechnen ($m_{i,0}$ bezeichnet hier die Masse des Teilchens i , welche für alle Teilchen gleich ist):

$$\begin{aligned}-g \frac{\partial h}{\partial x} &= -g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m_{i,0}}{\tilde{\varrho}_{0,2} \lambda_i(t)} \sum_{i=1}^N \psi\left(\frac{1}{\lambda_i(t)}(x - q_i(t))\right) \right) \\ &= -g \frac{m_{i,0}}{\tilde{\varrho}_{0,2} \lambda_i(t)} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x} \psi\left(\frac{1}{\lambda_i(t)}(x - q_i(t))\right)\end{aligned}\quad (3.18)$$

Die Druckgradientkraft ist also im Wesentlichen davon abhängig, wie weit die einzelnen Teilchenschwerpunkte q_i vom betrachteten Punkt x entfernt sind.

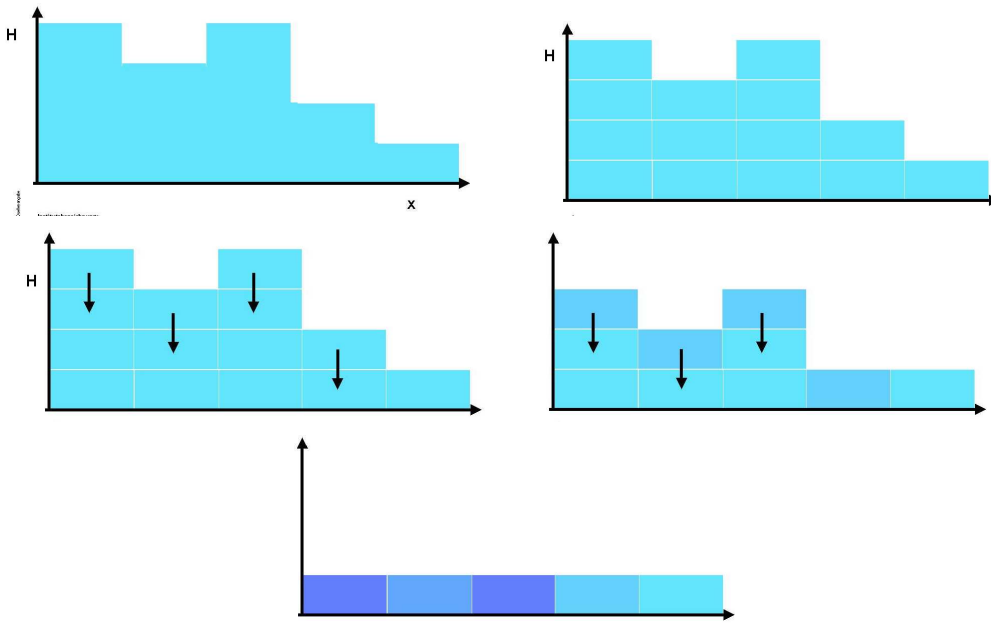


Abbildung 3.2: Visualisierung: Durch Umformung der Wassermasse in einzelne, rechteckförmige Massepakete mit bekannter Dichteverteilung $\rho_i = cte$, lässt sich das zweidimensionale Problem auf eine räumliche Dimension reduzieren.

Visualisierung In Abb. 3.2 wird versucht zu veranschaulichen, was die Methode der Finiten Massen, angewandt auf ein Flachwassersystem, charakterisiert. Ausgehend von einem zweidimensionalen Problem, einem Querschnitt durch ein Gerinne, werden die vorhandenen Wasserelemente in rechteckförmige Masseteilchen unterteilt. Diese so entstandenen Masseteilchen, mit einer festgelegten internen Masseverteilung (repräsentiert durch die türkisfarbenen Rechtecke) können dann das Problem auf eine räumliche Dimension transformieren. Dies geschieht, indem man sich vorstellt, dass sich alle Masseteilchen senkrecht nach unten aufeinander schieben. Die Bewegung der zusammengeschobenen Teilchen in x -Richtung repräsentiert dann die Ausbreitung einer Welle. Die so entstandene eindimensionale Teilchendichte, repräsentiert durch die verschiedenen Farben im Eindimensionalen, lässt sich jederzeit wieder auf die zweidimensionale Darstellung zurückführen.

3.2.1.2 Herleitung der Bewegungsgleichungen

In Anlehnung an die Vorgehensweise von Yserentant et al. (Gauger et al., 2000) erfolgt die Herleitung der Bewegungsgleichungen der Masseteilchen über die Lagrangeschen Gleichungen⁷. Die hierzu benötigte Lagrangefunktion resultiert aus der Subtraktion der potenziellen von der kinetischen Energie

$$\mathcal{L} = E_{kin} - E_{pot}. \quad (3.19)$$

⁷Sie werden in der Variationsrechnung auch als Eulersche Gleichungen bezeichnet, im Gegensatz zur üblichen meteorologischen Bezeichnung.

Die potenzielle Energie E_{pot} des Flachwassersystems ergibt sich durch Integration der Energiedichte ϵ_{pot}

$$E_{pot} = \int_{x_1}^{x_2} \epsilon_{pot} dx, \quad (3.20)$$

wobei die Energiedichte ϵ_{pot} die Energie an einem bestimmten Punkt x im betrachteten Flachwassersystem vom Boden bis zur Wasseroberfläche $h(x, t)$ angibt. Integriert wird hierbei das Produkt aus der konstanten Flachwasserdichte $\tilde{\varrho}_{0,2}$, der Erdbeschleunigung g und dem infinitesimalen Höhenabschnitt \tilde{h} der Höhe h .

$$\epsilon_{pot} = \int_0^{h(x,t)} \tilde{\varrho}_{0,2} g \tilde{h} d\tilde{h} = \tilde{\varrho}_{0,2} g \frac{1}{2} [h(x, t)]^2 \quad (3.21)$$

Somit ergibt sich die potenzielle Energie des eindimensionalen Flachwassersystems bei periodischen Randbedingungen und ohne Orografie, d.h. $h(x, t) = H(x, t)$ (vgl. (3.4)), als Integration der Energiedichte ϵ_{pot} über die gesamte Länge L :

$$E_{pot} = \int_0^L \tilde{\varrho}_{0,2} g \frac{1}{2} [H(x, t)]^2 dx. \quad (3.22)$$

Unter Verwendung der auf Basis der Flachwassergleichungen erstellten Formel für die Höhe $h(x)$, Gleichung (3.16)ff, erhält man für die potenzielle Energie E_{pot}

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \tilde{\varrho}_{0,2} g \int \left[\frac{1}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \sum_{i=1}^N \varrho_i(x) \right]^2 dx \quad (3.23)$$

Betrachtet man nun Teilchen, die alle die gleiche Masse $m_{i,0}$ haben und jeweils ihre Größe $\lambda_i(t)$ zeitlich verändern können, so kann man die potenzielle Energie als Funktion von $q_i(t)$ und $\lambda_i(t)$ ausdrücken

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \frac{1}{2} \tilde{\varrho}_{0,2} g \int \left[\frac{1}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \sum_{i=1}^N \frac{m_{i,0}}{\lambda_i(t)} \psi_i \left(\frac{1}{\lambda_i(t)} (x - q_i(t)) \right) \right]^2 dx \\ &= \frac{m_{i,0}^2 g}{2 \tilde{\varrho}_{0,2}} \int \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i(t)} \psi_i \left(\frac{1}{\lambda_i(t)} (x - q_i(t)) \right) \right]^2 dx. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Die kinetische Energie $E_{kin,i}$ eines Teilchens i setzt sich zusammen aus dem Anteil $\frac{1}{2} m_{i,0} \dot{q}_i^2$, der die Geschwindigkeit des Teilchens beinhaltet und dem Term $\frac{1}{2} J m_{i,0} \dot{\lambda}_i^2$, der durch die Größenveränderung des Teilchens bestimmt ist. Man erhält den bereits in (Gauger et al., 2000) hergeleiteten Ausdruck:

$$E_{kin,i} = \frac{1}{2} m_{i,0} \dot{q}_i^2 + \frac{1}{2} J m_{i,0} \dot{\lambda}_i^2, \quad (3.25)$$

wobei die Konstante J für die verwendete Splinefunktion (2.8) den Wert $\frac{1}{12}$ annimmt (vgl. (2.9)).

Die gesamte kinetische Energie E_{kin} des Systems ist die Superposition aller Teilchenenergien $E_{kin,i}$ und demnach

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \sum_{i=1}^N E_{kin,i} \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_{i,0} \dot{q}_i^2 + \frac{1}{2} m_{i,0} J \dot{\lambda}_i^2 \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Da im weiteren Verlauf dieser Arbeit davon ausgegangen wird, dass alle Teilchenmassen $m_{i,0}$ identisch sind, wird im Folgenden die Schreibweise $m = m_{i,0}$ verwendet.

Mit Hilfe der kinetischen und der potenzielle Energie lässt sich nun die Lagrangefunktion \mathcal{L} aufstellen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= E_{kin} - E_{pot} \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 + \frac{1}{2} m J \dot{\lambda}_i^2 \right) - \frac{m^2 g}{2\tilde{\varrho}_{0,2}} \int \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i(t)} \psi_i \left(\frac{1}{\lambda_i(t)} (x - q_i(t)) \right) \right]^2 dx\end{aligned}\quad (3.27)$$

Die Lagrangeschen Gleichungen, die Bewegungsgleichungen für $q_i(t)$ und $\lambda_i(t)$, ergeben sich aus dem nach ihm benannten Formalismus zu:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (3.29)$$

Zur Berechnung der Gleichung (3.28) für q_i betrachtet man zunächst die einzelnen Terme und hat

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m \dot{q}_k^2 \right) \\ &= m \dot{q}_i\end{aligned}\quad (3.30)$$

für die Variable \dot{q}_i und

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} &= - \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{m^2 g}{2\tilde{\varrho}_{0,2}} \int \left[\sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j(t)} \psi_j \left(\frac{1}{\lambda_j(t)} (x - q_j(t)) \right) \right]^2 dx \right] \\ &= - \frac{m^2 g}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \int \left[\sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} \psi_j \left(\frac{1}{\lambda_j} (x - q_j) \right) \right] \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{-1}{\lambda_i} \right) \psi'_i \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) dx \\ &= \frac{m^2 g}{\tilde{\varrho}_{0,2} \lambda_i^2} \int \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} \psi_j \left(\frac{1}{\lambda_j} (x - q_j) \right) \psi'_i \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) dx\end{aligned}\quad (3.31)$$

für die Ableitung nach q_i .

Nach Einsetzen von (3.45) und (3.30) in die Lagrangegleichung (3.28)

$$\frac{d}{dt} m \dot{q}_i = \frac{m^2 g}{\tilde{\varrho}_{0,2} \lambda_i^2(t)} \int \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j(t)} \psi_j \left(\frac{1}{\lambda_j(t)} (x - q_j(t)) \right) \psi'_i \left(\frac{1}{\lambda_i(t)} (x - q_i(t)) \right) dx \quad (3.32)$$

erhält man die Bewegungsgleichung in q_i, \dot{q}_i :

$$\ddot{q}_i = \frac{g}{\tilde{\varrho}_{0,2} \lambda_i^2(t)} \int \sum_{j=1}^N \frac{m}{\lambda_j(t)} \psi_j \left(\frac{1}{\lambda_j(t)} (x - q_j(t)) \right) \psi'_i \left(\frac{1}{\lambda_i(t)} (x - q_i(t)) \right) dx. \quad (3.33)$$

Hier erkennt man einen wesentlichen Aspekt der Methode der Finiten Massen: die einzelnen Teilchen i wechselwirken mit dem von allen Teilchen erzeugten Dichtefeld $\varrho =$

$\sum_{j=1}^N \frac{m}{\lambda_j(t)} \psi_j \left(\frac{1}{\lambda_j(t)} (x - q_j(t)) \right)$. Formal betrachtet kann man den Integranden von (3.33) durchaus als Wechselwirkung zwischen den einzelnen Teilchen betrachten, dennoch liegt der große numerische Vorteil der Methode darin, dass dieses Dichtefeld nur einmal berechnet werden muss und dann für alle Teilchen gültig ist.

Analog erfolgt die Herleitung der Bewegungsgleichung (3.29) für λ_i und $\dot{\lambda}_i$. Zuerst werden die einzelnen Ableitungen der Langrangefunktion nach den Variablen $\dot{\lambda}_i$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\lambda}_i} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} J m \dot{\lambda}_k^2 \\ &= J m \dot{\lambda}_i \end{aligned} \quad (3.34)$$

und λ_i berechnet.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} &= -\frac{m^2 g}{2 \tilde{\varrho}_{0,2}} \int \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k(t)} \psi_k \left(\frac{1}{\lambda_k(t)} (x - q_k(t)) \right) \right]^2 dx \\ &= -\frac{m^2 g}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \int \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k} \psi_k \left(\frac{1}{\lambda_k} (x - q_k) \right) \right] \\ &\quad \cdot \left[\frac{-1}{\lambda_i^2} \psi_i \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) + \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \psi_i \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) \right] dx \end{aligned} \quad (3.35)$$

Mit Hilfe der Formel für die Berechnung der Differentiation von ψ_i nach λ_i

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \psi_i \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) = \psi'_i \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) \left[-\frac{1}{\lambda_i^2} (x - q_i) \right], \quad (3.36)$$

erhält man schließlich für (3.35)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} &= \frac{m^2 g}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \int \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k} \psi_k \left(\frac{1}{\lambda_k} (x - q_k) \right) \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{\lambda_i^2} \psi_i \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) + \frac{1}{\lambda_i^3} \psi'_i \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) (x - q_i) \right] dx. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Nun lässt sich die Lagrange Gleichung (3.29) für λ_i und $\dot{\lambda}_i$ aufstellen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J m \dot{\lambda}_i &= \frac{m^2 g}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \int \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k} \psi_k \left(\frac{1}{\lambda_k} (x - q_k) \right) \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{\lambda_i^2} \psi_i \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) + \frac{1}{\lambda_i^3} \psi'_i \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) (x - q_i) \right] dx \end{aligned} \quad (3.38)$$

und es ergibt sich für die Beschleunigung von λ_i die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda}_i &= \frac{m g}{\tilde{\varrho}_{0,2} J \lambda_i^2(t)} \int \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k(t)} \psi_k \left(\frac{1}{\lambda_k(t)} (x - q_k(t)) \right) \\ &\quad \cdot \left[\psi_i \left(\frac{1}{\lambda_i(t)} (x - q_i(t)) \right) + \frac{1}{\lambda_i(t)} \psi'_i \left(\frac{1}{\lambda_i(t)} (x - q_i(t)) \right) (x - q_i(t)) \right] dx. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Auch in diesem Fall könnte man den Integranden der Beschleunigung von λ_i als Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung auffassen, jedoch bildet den Vorteil der FMM die Tatsache, dass man diesen Integranden als Wechselwirkung des Teilchens i mit dem aus allen Teilchen erzeugten Dichtefeld $\varrho = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{\lambda_k} \psi_k$ betrachtet.

3.2.1.3 Die Bewegungsgleichungen mit Orografie

Für eine Vielzahl von Anwendungen, z.B. Umströmen und Überströmen von Hindernissen (Berge o.ä.), benötigt man für die Beschreibung eines Flachwassersystems auch eine Bodenoroografie $h_b(x)$. Damit ergeben sich für die Bewegungsgleichungen in q_i , \dot{q}_i (Gl. 3.33) und λ_i , $\dot{\lambda}_i$ (Gl. 3.39) einige Modifikationen.

Die Wasseroberfläche $h(x, t)$ setzt sich nun zusammen aus der Höhe der Wassersäule $H(x, t)$ und der Bodenstruktur $h_b(x)$ (vgl. Abb. 3.1)

$$h(x, t) = H(x, t) + h_b(x). \quad (3.40)$$

Daraus erhält man die Formel für die Höhe (vgl. Gl. 3.17) unter Berücksichtigung der Orografie zu

$$h(x, t) = \frac{1}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\lambda_i(t)} \psi\left(\frac{1}{\lambda_i(t)} (x - q_i(t))\right) + h_b(x) \quad (3.41)$$

Die zum Aufstellen der Lagrangeschen Funktion \mathcal{L} benötigten Energien ändern sich damit wie folgt: auf die kinetische Energie E_{kin} (Gl. 3.26) wird durch die Bodenstruktur keinen Einfluss ausgeübt, jedoch ändert sich die potenzielle Energiedichte ϵ_{pot} zu (vgl. Gl. 3.21)

$$\epsilon_{pot} = \int_{h_b}^h \tilde{\varrho}_{0,2} g \tilde{h} dh = \tilde{\varrho}_{0,2} g \frac{1}{2} \left([h(x, t)]^2 - [h_b(x)]^2 \right) \quad (3.42)$$

und damit auch die potenzielle Energie $E_{pot} = \int_0^L \epsilon_{pot} dx$ (Gl. 3.24). Nach Einsetzen von (3.41) kann man sie in den Variablen $q_i(t)$ und $\lambda_i(t)$ darstellen.

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \frac{m g}{2} \int_0^L \left\{ \frac{m}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i(t)} \psi_i\left(\frac{1}{\lambda_i(t)} (x - q_i(t))\right) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 h_b(x) \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i(t)} \psi_i\left(\frac{1}{\lambda_i(t)} (x - q_i(t))\right) \right] \right\} dx \end{aligned} \quad (3.43)$$

Die so nun an eine Orografie angepasste Lagrangefunktion \mathcal{L} lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= E_{kin} - E_{pot} \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 + \frac{1}{2} m J \dot{\lambda}_i^2 \right) - \frac{m g}{2} \int_0^L \left\{ \frac{m}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i(t)} \psi_i\left(\frac{1}{\lambda_i(t)} (x - q_i(t))\right) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 h_b(x) \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i(t)} \psi_i\left(\frac{1}{\lambda_i(t)} (x - q_i(t))\right) \right] \right\} dx. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Mit dieser an die Bodenstruktur angepassten Lagrangefunktion können die Lagrangeschen Gleichungen (s. Gl. 3.28 und 3.29) aufgestellt werden. Die Ableitung nach \dot{q}_i ändert sich nicht (Gl. 3.30), denn die kinetische Energie wurde ja durch die Berücksichtigung der Orografie nicht beeinflusst, jedoch ergibt sich bei der Differentiation nach q_i , die auf den durch die potenzielle Energie bestimmten Anteil der Lagrangefunktion wirkt, folgender

Ausdruck:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} &= -\frac{m^2 g}{2 \tilde{\varrho}_{0,2}} \frac{\partial}{\partial q_i} \int_0^L \left[\sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j(t)} \psi_j \left(\frac{1}{\lambda_j(t)} (x - q_j(t)) \right) \right]^2 dx \\
&\quad - m g \frac{\partial}{\partial q_i} \int_0^L h_b(x) \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j(t)} \psi_j \left(\frac{1}{\lambda_j(t)} (x - q_j(t)) \right) dx \\
&= \frac{m^2 g}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \int_0^L \frac{1}{\lambda_i^2} \psi'_i \left(\frac{1}{\lambda_i(t)} (x - q_i(t)) \right) \left[\sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j(t)} \psi_j \left(\frac{1}{\lambda_j(t)} (x - q_j(t)) \right) \right] dx \\
&\quad + m g \int_0^L h_b(x) \frac{1}{\lambda_i^2(t)} \psi'_i \left(\frac{1}{\lambda_i(t)} (x - q_i(t)) \right) dx \tag{3.45}
\end{aligned}$$

oder auch:

$$\begin{aligned}
&= m g \int_0^L \frac{1}{\lambda_i^2(t)} \psi'_i \left(\frac{1}{\lambda_i(t)} (x - q_i(t)) \right) \\
&\quad \left[\frac{m}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j(t)} \psi_j \left(\frac{1}{\lambda_j(t)} (x - q_j(t)) \right) \right) + h_b(x) \right] dx. \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Kombiniert man beide Ableitungen (Gln. 3.30 und 3.45), so ergibt sich die Bewegungsgleichung in q_i und \dot{q}_i :

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_i &= \frac{g}{\lambda_i^2} \int_0^L \psi'_i \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) \left[\frac{m}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} \psi_j \left(\frac{1}{\lambda_j} (x - q_j) \right) \right) + h_b(x) \right] dx \\
&= \underbrace{\frac{m g}{\tilde{\varrho}_{0,2} \lambda_i^2} \int_0^L \psi'_i \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) \left[\sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} \psi_j \left(\frac{1}{\lambda_j} (x - q_j) \right) \right] dx}_{\text{Antrieb ohne Boden (vgl. Gl. 3.33)}} \\
&\quad + \underbrace{\frac{g}{\lambda_i^2} \int_0^L \psi'_i \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) h_b(x) dx}_{\text{Antrieb durch die Orografie}} \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Analog erhält man die Gleichungen für λ_i und $\dot{\lambda}_i$. Die Ableitung der modifizierten Lagrangefunktion \mathcal{L} (Gl. 3.44) nach λ_i liefert natürlich das Ergebnis wie in Gleichung (3.34), denn der Anteil der potenzielle Energie fällt durch die Ableitung weg, jedoch liefert die

Ableitung nach λ_i einen Beitrag, der die Orografie miteinschliesst.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left[-\frac{m^2 g}{2 \tilde{\varrho}_{0,2}} \int_0^L \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k} \psi_k \left(\frac{1}{\lambda_k} (x - q_k) \right) \right]^2 dx \right. \\ \left. + m g \int_0^L h_b(x) \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k} \psi_k \left(\frac{1}{\lambda_k} (x - q_k) \right) \right] dx \right] \quad (3.48)$$

$$= \underbrace{\frac{m^2 g}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \int_0^L \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k} \psi_k \left(\frac{1}{\lambda_k} (x - q_k) \right) \left[\frac{1}{\lambda_i^2} \psi_i \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\lambda_i^3} \psi_i' \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) (x - q_i) \right] dx}_{\text{Anteil ohne Boden}} \\ - \underbrace{m g \int_0^L h_b(x) \left[\frac{1}{\lambda_i^2} \psi_i \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) + \frac{1}{\lambda_i^3} \psi_i' \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) (x - q_i) \right] dx}_{\text{Anteil der Orografie}} \quad (3.49)$$

Nun kann man einfach durch Einsetzen der beiden Ableitungen in die Lagrangesche Gleichung die Differentialgleichung in λ_i und $\dot{\lambda}_i$ aufstellen und erhält für die Beschleunigung unter Berücksichtigung einer Orografie:

$$\ddot{\lambda}_i = \frac{1}{m J} \int \frac{1}{\lambda_i^2} \psi_i \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) \left[\left\{ \frac{m^2 g}{2 \tilde{\varrho}_{0,2}} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k} \psi_k \left(\frac{1}{\lambda_k} (x - q_k) \right) \right\} - m g h_b(x) \right] dx \\ + \frac{1}{m J} \int \frac{1}{\lambda_i^3} \psi_i' \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) (x - q_i) \\ \cdot \left[\left\{ \frac{m^2 g}{2 \tilde{\varrho}_{0,2}} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k} \psi_k \left(\frac{1}{\lambda_k} (x - q_k) \right) \right\} - m g h_b(x) \right] dx \quad (3.50)$$

oder auch, getrennt nach den Anteilen:

$$\ddot{\lambda}_i = \frac{1}{m J} \int \left[\frac{1}{\lambda_i^2} \psi_i \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) + \frac{1}{\lambda_i^3} \psi_i' \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) (x - q_i) \right] \\ \cdot \underbrace{\left\{ \frac{m^2 g}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k} \psi_k \left(\frac{1}{\lambda_k} (x - q_k) \right) \right\} dx}_{\text{Antrieb ohne Boden (vgl. Gl. 3.39)}} \\ - \underbrace{\frac{g}{J} \int \left[\frac{1}{\lambda_i^2} \psi_i \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) + \frac{1}{\lambda_i^3} \psi_i' \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) (x - q_i) \right] h_b(x) dx}_{\text{Antrieb durch die Orografie}} \quad (3.51)$$

3.2.1.4 Einige Beispiele zum generellen Verhalten des Systems

Anhand von mehreren Beispielen soll die grundlegende Wirkungsweise der FMM erläutert werden, um wesentliche Punkte des Verhaltens des Systems zu verstehen. Im Folgenden werden die Auswirkungen der auf Basis der eindimensionalen Flachwassergleichung

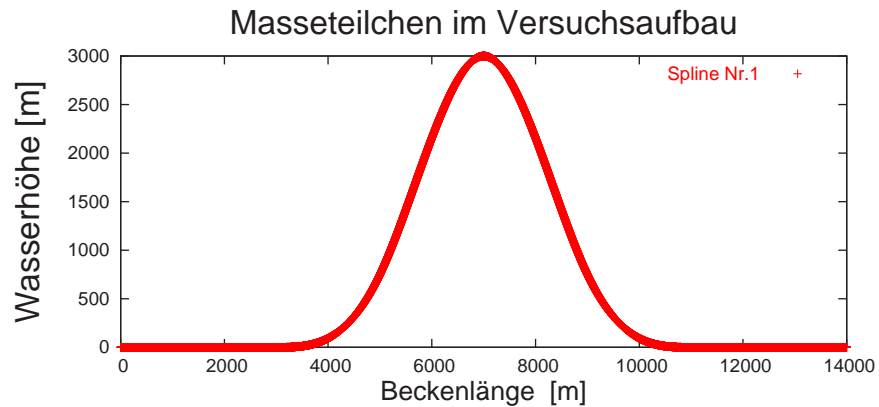


Abbildung 3.3: Beispiel zu Illustration der Wirkungsweise der FMM: Wasserhöhe [m] für einen Anfangszustand mit nur einem Masseteilchen bei der Position $q_1 = 7000$ m, der Größe $\lambda_1 = 4000$ m und der Masse $m_1 = 9000000$ kg in einem Versuchsaufbau der Länge $L = 14000$ m.

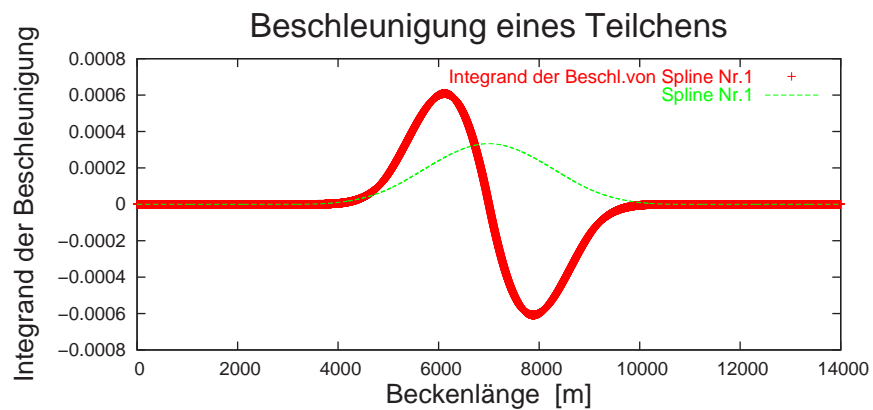


Abbildung 3.4: Integrand der Beschleunigung des Schwerpunktes des Masseteilchens bei $q_2 = 7000$ m und zum Vergleich die zugrundeliegende Splinefunktion.

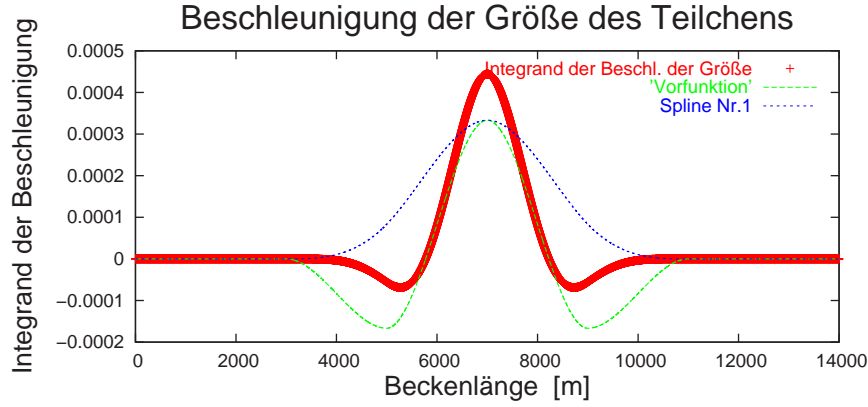


Abbildung 3.5: Integrand der Beschleunigung $\ddot{\lambda}_1$ eines einzelnen Masseteilchens der Masse $m_1 = 9000000$ kg am Punkt $q_1 = 7000$ m in einem Versuchsaufbau der Länge $L = 14000$ m.

erstellten Gleichungen für die Beschleunigungen von q_i und λ_i betrachtet. Um die Anschaulichkeit in den Beispielen zu gewährleisten, wird dabei in Kauf genommen, dass die Flachwasserbedingungen verletzt werden (vgl. Bedingungen 3.5 und 3.6). Im ersten Beispiel werden die Auswirkungen der Gleichungen (3.33) und (3.39) auf ein einzelnes Masseteilchen diskutiert. Im zweiten Beispiel wird dann erläutert, wie sich die Anwesenheit eines weiteren Teilchens auf dieses erste auswirkt, und im dritten Beispiel wird die Größenentwicklung einzelner Teilchen bei einer speziellen Ansgangskonfiguration studiert.

1. Beispiel: Betrachtet wird ein Masseteilchen mit $m_1 = 9000000$ kg, der Größe $\lambda_1 = 4000$ m bei der Position $q_1 = 7000$ m in einem Versuchsaufbau der Länge $L = 14000$ m (s. Abb. 3.6). Die auf das Teilchen wirkende Beschleunigung ist durch Gl. (3.33) gegeben und lautet damit:

$$\ddot{q}_1 = \frac{mg}{\tilde{\varrho}_{0,2} \lambda_1^2} \int \frac{1}{\lambda_1} \psi_1\left(\frac{1}{\lambda_1}(x - q_1)\right) \psi_1'\left(\frac{1}{\lambda_1}(x - q_1)\right) dx. \quad (3.52)$$

In Abb. 3.4 ist der Integrand dieses Ausdruckes dargestellt. Zusätzlich dazu wurde die Splinefunktion selbst nochmals dargestellt. Man erkennt, dass bei der Integration über die Funktion das Integral Null ergibt, weil es sich hierbei um eine punktsymmetrische Funktion zum Schwerpunkt $q_1 = 7000$ m handelt. Das Masseteilchen erhält also keine Beschleunigung seines Schwerpunktes. In Abb. 3.5 ist der Integrand der Beschleunigung der Größe ($\ddot{\lambda}_1$) aufgetragen. $\ddot{\lambda}_1$ ergibt sich nach Gl.(3.39) bei einem Teilchen zu

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda}_1 = & \frac{mg}{\tilde{\varrho}_{0,2} J \lambda_1^2} \int \underbrace{\left[\psi_1\left(\frac{1}{\lambda_1}(x - q_1)\right) + \frac{1}{\lambda_1} \psi_1'\left(\frac{1}{\lambda_1}(x - q_1)\right)(x - q_1) \right]}_{\text{Vorfunktion}} \\ & \cdot \frac{1}{\lambda_1} \psi_1\left(\frac{1}{\lambda_1}(x - q_k(t))\right) dx \end{aligned} \quad (3.53)$$

und setzt sich damit zusammen aus der Vorfunktion, die nur aus Funktionen des Teilchens Nr. 1 besteht und der Summe über alle anderen Teilchen, die in diesem Fall auch nur aus Teilchen Nr.1 besteht. Zur Veranschaulichung der Vorfunktion und der Splinefunktion sind diese beiden Funktionen ebenfalls in Abb. 3.5 dargestellt (in grün bzw. blau). Man erkennt,

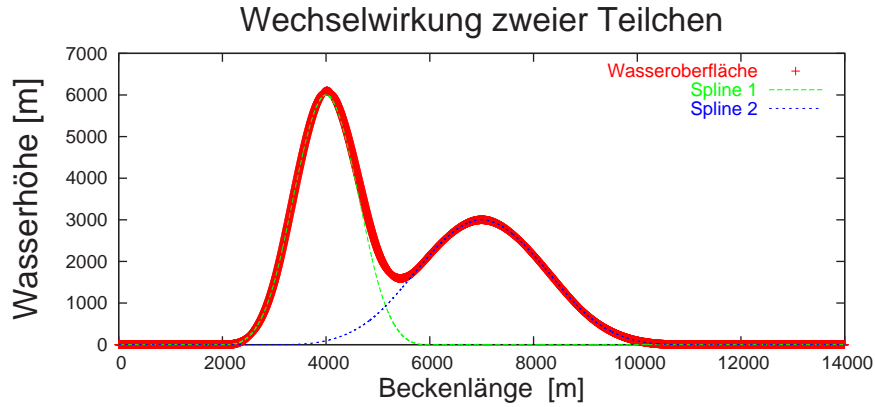


Abbildung 3.6: 2. Beispiel zu Illustration der Wirkungsweise der FMM: Wasserhöhe [m] für einen Anfangszustand mit zwei Teilchen identischer Masse, aber unterschiedlicher Größe. Die Teilchenpositionen sind bei $q_1 = 4000$ m und $q_2 = 7000$ m zum Zeitpunkt $T = t_0$. Dünn dargestellt: Beitrag zur gesamten Wasserhöhe der Teilchen 1 und 2.

dass bei Aufsummierung des Integranden ein positiver Wert entsteht, so dass deutlich ist, dass das Teilchen Nr.1 nur durch seine alleinige Anwesenheit selbst im Laufe der Zeit immer größer wird. Ein Ergebnis, wie man es auch erwartet, denn ein (splineförmiger) Wasserberg wird im Laufe der Zeit auch zerfließen.

2. Beispiel: Zwei Teilchen mit der gleichen Masse $m = 9000000$ kg, aber mit unterschiedlichen Größen λ , nämlich $\lambda_1 = 2000$ m und $\lambda_2 = 4000$ m, werden an verschiedenen Positionen $x_1 = q_1(t_0) = 4000$ m und $x_2 = q_2(t_0) = 7000$ m im Wassertank platziert. Die sich durch sie bildende Wasseroberfläche ist in Abb. 3.6 rot dargestellt. Die gestrichelten Linien in grün und blau zeigen die Splines der Teilchen bei x_1 und x_2 an. Abbildung 3.7 zeigt den zeitlichen Verlauf der Wasserhöhe im Längsschnitt durch den Tank. Man erkennt, wie sich im zeitlichen Verlauf die Wasserhöhe besonders an der Stelle $x_1 = 4000$ m absenkt, das Teilchen q_1 also breiter wird. Abgebrochen wurde die Simulation zu einem Zeitpunkt, zu dem der Radius der beiden Teilchen (λ_1 und λ_2) noch nicht die Hälfte des Beckens erreicht hatte. Dies gewährleistet, dass Wechselwirkungen der Teilchen mit sich selbst, die aufgrund der periodischen Randbedingungen auftreten, noch nicht stattfinden konnten.

Im Folgenden wird die Beeinflussung der Ausgangssituation auf das Teilchen q_2 betrachtet. Für die Beschleunigung des Masseteilchens Nr. 2 gilt (vgl. Gl. 3.33):

$$\begin{aligned} \ddot{q}_2 = \frac{mg}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \int & \left[\underbrace{\frac{1}{\lambda_2^2} \psi_2' \left(\frac{1}{\lambda_2} (x - q_2) \right) \frac{1}{\lambda_1} \psi_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} (x - q_1) \right)}_{\text{Anteil Teilchen 1}} \right. \\ & \left. + \underbrace{\frac{1}{\lambda_2^2} \psi_2' \left(\frac{1}{\lambda_2} (x - q_2) \right) \frac{1}{\lambda_2} \psi_2 \left(\frac{1}{\lambda_2} (x - q_2) \right)}_{\text{Anteil Teilchen 2}} \right] dx \end{aligned} \quad (3.54)$$

Der zweite Teil der Gleichung ist der bereits aus dem Einteilchen-Beispiel bekannte Eigenanteil der Beschleunigung des Teilchens Nr. 2 und ergibt bei Integration den Beitrag null zur Beschleunigung. Der erste Summand unter dem Integral ist der Beitrag des Teilchens

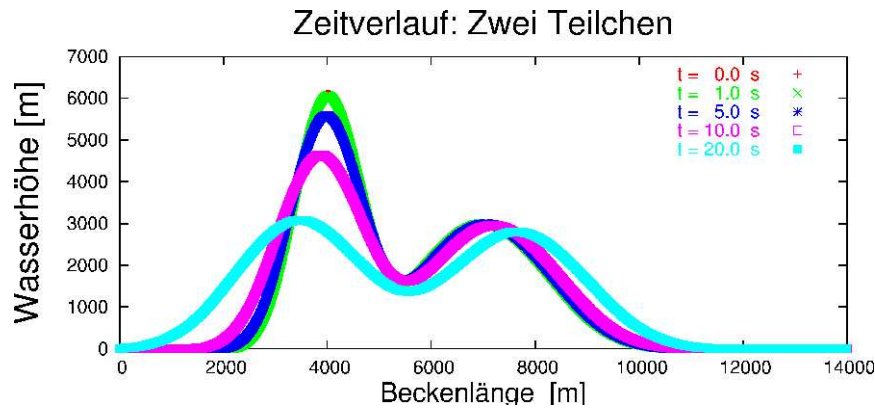


Abbildung 3.7: 2. Beispiel zu Illustration der Wirkungsweise der FMM: Wasserhöhe [m] im Laufe der Zeit für die Ausgangssituation mit zwei Teilchen. Teilchenpositionen sind bei $q_1 = 4000$ m und $q_2 = 7000$ m zu den Zeitpunkten $t_0 = 0.0$ s $t_1 = 1.0$ s $t_2 = 5.0$ s $t_3 = 10.0$ s $t_4 = 20.0$ s.

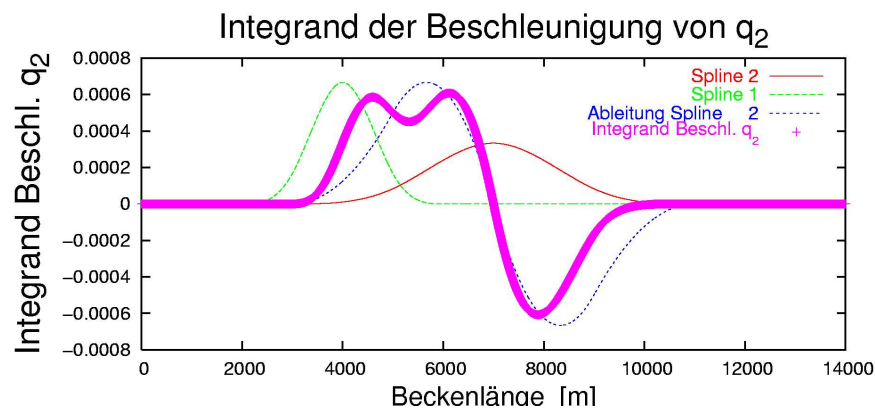


Abbildung 3.8: 2. Beispiel: Hier sieht man deutlich, wie die Konfiguration der zwei Teilchen die Beschleunigung auf q_2 (bei $x_2 = 7000$ m) beeinflusst. (geplottet ist lediglich der Integrand der Beschleunigung für Teilchen Nr. 2, ferner wurde zusätzlich in blau die Ableitung des Teilchens q_2 verkleinert um den Faktor λ_2 eingezeichnet, in rot der Beitrag von Teilchen Nr. 2 ebenfalls verkleinert um den Faktor λ_2 und in grün der Beitrag von q_1 , in diesem Fall um den Faktor λ_1 verkleinert eingezeichnet).

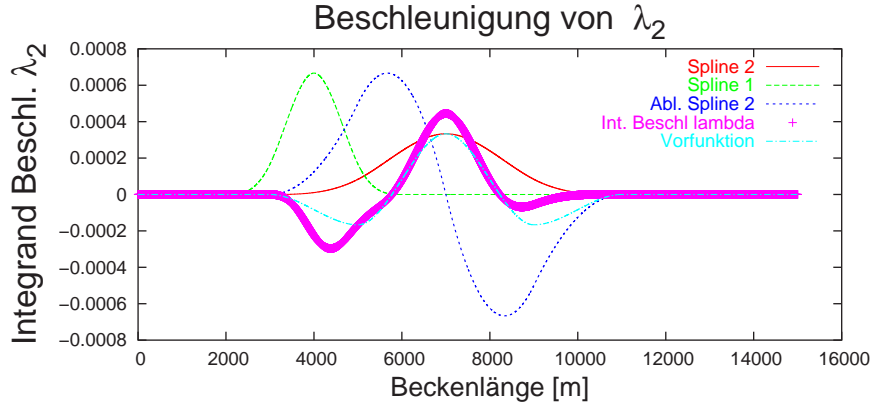


Abbildung 3.9: 2. Beispiel: Hier ist der Integrand der Beschleunigung der Größe des Teilchens Nr. 2 dargestellt (magenta-farbener Graph). Zur Verdeutlichung des Zustandekommens der Funktion sind ebenfalls die Beiträge der Vorfunktion (türkisfarbene Linie), des Teilchens Nr. 1 (grün) und des Teilchens Nr. 2 und dessen Ableitung (rot bzw. blau) dargestellt.

Nr. 1, eine Multiplikation der Ableitung des Splines von Nr. 2 mal Spline Nr. 1 selbst. Wie das Integral in Gleichung (3.54) das Verhalten des Massepaketes beeinflusst, zeigt Abb. 3.8. Hier sind die Splines von Teilchen 1 und 2 (grün bzw. rot), wie auch die Ableitung von Spline 2 (blau) dargestellt. In magenta ist der Integrand der Beschleunigung von q_2 geplottet. Die Integration über diese Kurve liefert also, multipliziert mit $\frac{mg}{\tilde{\varrho}_{0,2}}$, die Beschleunigung \ddot{q}_2 . Sieht man sich die einzelnen Bestandteile dieses Graphen an, so erkennt man deutlich den Einfluss von Teilchen 1 auf die Beschleunigung von q_2 : liegen die beiden Teilchen zu weit auseinander, ergibt sich kein Beschleunigungsbeitrag von Teilchen 1. Liegt Teilchen Nr. 1 jedoch mit seinem Schwerpunkt q_1 noch links von q_2 , so leistet die Multiplikation mit der Ableitung von Spline 2 einen positiven Beitrag und das Teilchen Nr. 2 erfährt eine positive Beschleunigung, wie es ja auch in unserem Beispiel der Fall ist. Im gegensätzlichen Fall, wenn also das Masseteilchen Nr. 1 rechts von q_2 liegt, wird die Bewegung von Teilchen Nr. 2 verzögert.

Für die Beschleunigung der Größe des Teilchens Nr. 2, $\ddot{\lambda}_2$, ergibt sich im 2-Teilchen-Problem nach Gl. (3.39):

$$\ddot{\lambda}_2 = \int \frac{mg}{\tilde{\varrho}_{0,2} J \lambda_2^2} \left[\underbrace{\psi_2\left(\frac{1}{\lambda_2}(x - q_2)\right) + \frac{1}{\lambda_2} \psi_2'\left(\frac{1}{\lambda_2}(x - q_2)\right)(x - q_2)}_{\text{Vorfunktion Teilchen Nr. 2}} \cdot \left[\frac{1}{\lambda_1} \psi_1\left(\frac{1}{\lambda_1}(x - q_1)\right) + \frac{1}{\lambda_2} \psi_2\left(\frac{1}{\lambda_2}(x - q_2)\right) \right] dx \right. \quad (3.55)$$

In Abbildung 3.9 ist der Integrand der Beschleunigung von λ_2 dargestellt (magenta-farbene Kurve), der sich zusammensetzt aus der sog. Vorfunktion (s. Gl. 3.39, in türkis dargestellt) und den jeweiligen Splinefunktionen für Teilchen Nr. 1 (in grün) und Nr. 2 (in rot). Die Multiplikation der Vorfunktion mit Spline 2 selbst ergibt, wie auch schon im Beispiel Nr. 1 erläutert, einen Beitrag, der das Teilchen Nr. 2 immer größer werden lässt. Ob Teilchen Nr. 2 nun tatsächlich eine positive oder negative Beschleunigung $\ddot{\lambda}_2$ erhält, liegt also maßgeblich an der Position und Größe des mit ihm wechselwirkenden Teilchen

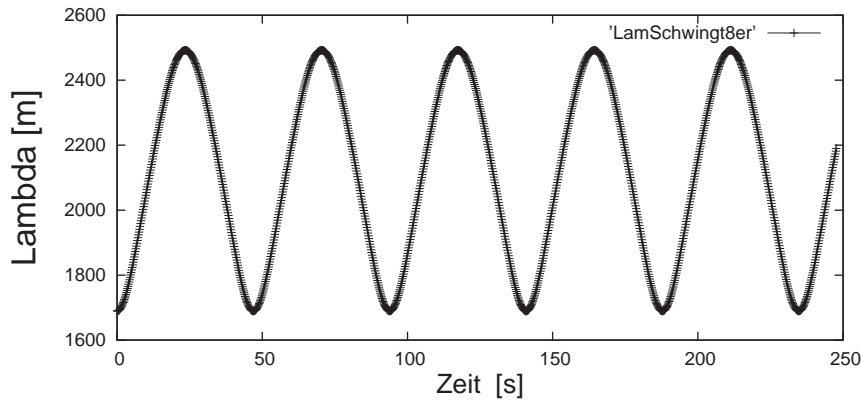


Abbildung 3.10: 3. Beispiel: Zeitliche Entwicklung von λ . Nach rechts ist die Zeit [s] aufgetragen und nach oben die Größe von λ [m] für ein Teilchen i .

Nr. 1, das in diesem Beispiel den negativen Anteil der Vorfunktion unterstützt und somit, zusammen mit dem Eigenbeitrag des Teilchens Nr. 2, bei der Integration eine recht kleine Beschleunigung $\ddot{\lambda}_i > 0$ erzeugt. Diese kann man auch in Abb. 3.7 erkennen: die Kurve um den Teilchenschwerpunkt q_2 wird breiter.

3. Beispiel: Im selben Versuchsaufbau werden nun 15 gleich große Teilchen so angeordnet, dass sie jeweils gerade so weit auseinander liegen, dass sie keine Beschleunigung $\ddot{q}_i = 0$ erfahren. Die Teilchen bleiben also stationär; sie werden durch die Anwesenheit der anderen Teilchen daran gehindert, eine Beschleunigung zu erhalten.

Betrachtet man nun die Gleichung (3.39) So scheint nichts dagegen zu sprechen, dass es eine Konfiguration gibt, bei der für alle Teilchen i sowohl die Beschleunigung der Größe $\ddot{\lambda}_i = 0$ als auch $\ddot{q}_i = 0$ gilt. Mathematisch kann man auch zeigen, dass es einen Nulldurchgang in der Beschleunigung der Größe geben muss, bei einer bestimmten Konfiguration der Teilchenschwerpunkte q_i . Dennoch wird diese in der Numerik nur approximiert erreicht, mit der Konsequenz, dass für ein beliebiges $\lambda(t = 0)$ die Größe des Teilchens anfängt zu schwingen. Denn sobald die Nachbarn eines Teilchens im selben Abstand rechts und links von dessen Schwerpunkt liegen, beeinflussen deren Anteile zuerst einmal in gleicher Weise die Teile der symmetrischen Vorfunktion (vgl. Abb. 3.5), so dass das Teilchen (je nach Lage der Nachbarn) zuerst einmal größer wird. Sobald diese Größe jedoch die Vorfunktion so modifiziert, dass nun die negativen Anteile überwiegen, schrumpft das Teilchen wieder. Bei einer Initialisierung von $\ddot{q}_i = 0$ fängt somit $\ddot{\lambda}_i$ automatisch an zu schwingen. Diese Eigenschaft ist in Abbildung 3.10 für ein beliebiges Teilchen i dargestellt.

4. Beispiel: In einem Wassertank der Länge $m = 10000$ m befindet sich ein einzelnes Massepäckchen mit dem Radius $\lambda = 1000$ m und der Masse $m = 9000$ kg an der Stelle $x = 4000$ m. Betrachtet wird nun der Einfluss einer Bodenorografie auf das Teilchen. Hierbei handelt es sich um eine Senke der Tiefe $h_b = 20$ m und der Breite $b = 3000$ m, deren Tiefpunkt bei $x = 5000$ m liegt, so dass das Masseteilchen bereits durch seine Ausgangslage am Abhang der Bodensenke liegt. Abb. 3.11 zeigt den zeitlichen Verlauf über die ersten 300 s. Man erkennt, wie das Teilchen sich mit der Zeit ausdehnt und gleichzeitig abwärts bewegt. Dabei erhält das Teilchen soviel kinetische Energie, dass die Bewegung für den Aufstieg am rechten Senkenrand ausreicht. Zum Zeitpunkt $t = 300.00$ s hat das Teilchen bereits die Richtung gewechselt und schwingt nun wieder zurück in Richtung der

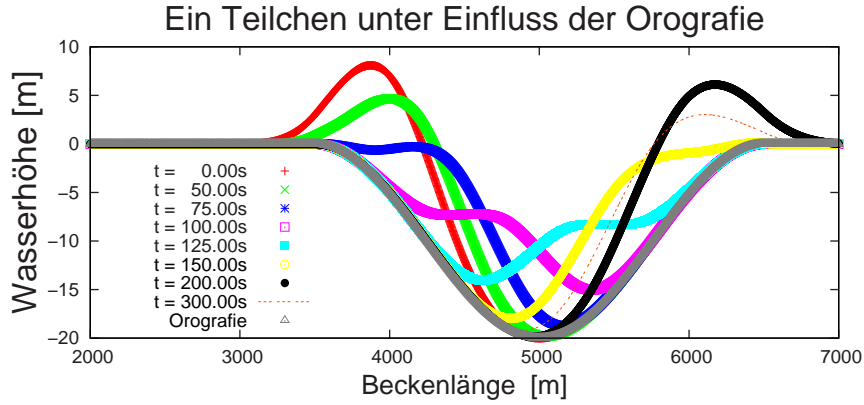


Abbildung 3.11: 4. Beispiel: Ein Teilchen q initialisiert bei $x = 4000$ m unter Einfluss einer Bodenoroografie. Dargestellt sind die Zeitpunkte $t = 0.00$ s, $t = 50.00$ s, $t = 75.00$ s, $t = 100.00$ s, $t = 125.00$ s, $t = 150.00$ s, $t = 200.00$ s und $t = 300.00$ s. Die Orografie, eine Bodensenke der Tiefe $h_b = 20$ m und der Breite $b = 3000$ m ist ebenfalls dargestellt.

Ausgangsposition (dargestellt als gestrichelte Linie in Abb. 3.11). Die dieses Verhalten bestimmenden Gleichungen (Gl. 3.47 und Gl. 3.51) wurden im vorhergehenden Kapitel hergeleitet. Die Beschleunigung für das Masseteilchen q errechnet sich demnach nach der Formel:

$$\ddot{q} = \underbrace{\frac{m g}{\tilde{\varrho}_{0,2} \lambda^2} \int_0^L \psi' \left(\frac{1}{\lambda} (x - q) \right) \left[\frac{1}{\lambda} \psi \left(\frac{1}{\lambda} (x - q) \right) \right] dx}_{\text{Antrieb ohne Boden}} + \underbrace{\frac{g}{\lambda^2} \int_0^L \psi' \left(\frac{1}{\lambda} (x - q) \right) h_b(x) dx}_{\text{Antrieb durch die Orografie}} \quad (3.56)$$

In Abb. 3.12 sind die einzelnen Anteile der auf das Teilchen wirkenden Beschleunigung aufgezeigt (jeweils ist nur der Integrand der Beschleunigung geplottet). Wie auch schon im ersten Beispiel gezeigt, erhält das Teilchen keine Beschleunigung durch seine eigene Splinefunktion. Der positive und negative Anteil der Splinableitungsfunktion (in rot dargestellt) addieren sich zu null und damit verschwindet der Eigenbeschleunigungsanteil des Teilchens. Die Beschleunigung aufgrund der Orografie spiegelt die Multiplikation der Splinefunktion mit der Bodenstruktur wieder, so dass aufgrund der Bodensenke in diesem Beispiel das Teilchen sich in Richtung der x -Achse beschleunigt. Die nach Gl. 3.51 für ein Teilchen gültige Formel für die Beschleunigung der Größe λ lautet:

$$\ddot{\lambda} = \underbrace{\frac{1}{m J} \int \left[\frac{1}{\lambda^2} \psi \left(\frac{1}{\lambda} (x - q) \right) + \frac{1}{\lambda^3} \psi' \left(\frac{1}{\lambda} (x - q) \right) (x - q) \right] \cdot \left\{ \frac{m^2 g}{2 \tilde{\varrho}_{0,2} \lambda} \psi \left(\frac{1}{\lambda} (x - q) \right) \right\} dx}_{\text{Antrieb ohne Boden}} - \underbrace{\frac{g}{J} \int \left[\frac{1}{\lambda^2} \psi \left(\frac{1}{\lambda} (x - q) \right) + \frac{1}{\lambda^3} \psi' \left(\frac{1}{\lambda} (x - q) \right) (x - q) \right] h_b(x) dx}_{\text{Antrieb durch die Orografie}} \quad (3.57)$$

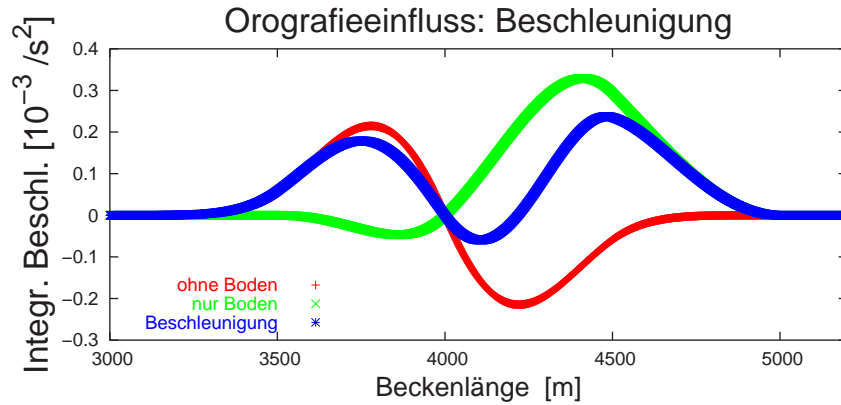


Abbildung 3.12: 4. Beispiel: Integrant der Beschleunigung nach Gl. 3.56 auf das Teilchen bei $q = 4000$ m an der Bodensenke zum Zeitpunkt $t = 0.00$ s. Die Integrandenanteile spalten sich auf nach: Eigenbeschleunigungsanteil (rot), Beschleunigung aufgrund der Orografie (grün) und resultierende Beschleunigung des Teilchens (blau).

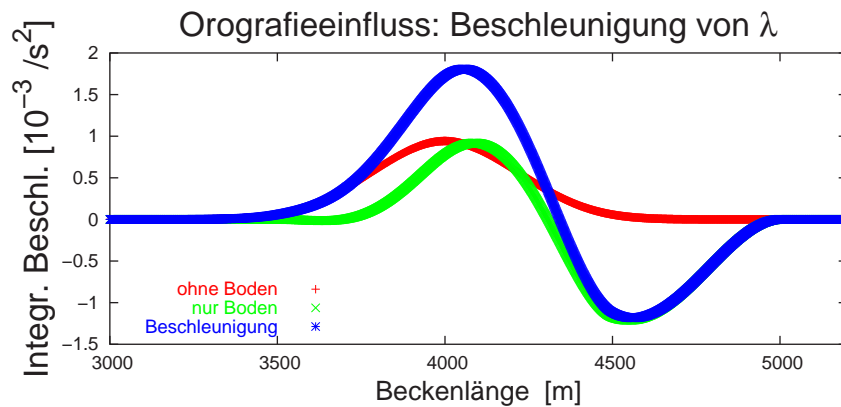


Abbildung 3.13: 4. Beispiel: Integrant der Beschleunigung der Größe λ des Teilchens bei $q = 4000$ m. Der Eigenanteil von $\ddot{\lambda}$ ist in rot dargestellt, der reine Anteil der Orografie in grün und die resultierende in blau.

In Abb. 3.13 ist der Integrant dieser Beschleunigung dargestellt. Wie schon im ersten Beispiel gezeigt, bedingt der Eigenanteil des Teilchens, dass seine Größe kontinuierlich anwächst. Der Anteil der Orografie bewirkt einen ausgleichenden Effekt, so dass das Maseteilchen langsamer anwächst als ohne Einfluss einer Orografie.

Der direkte Vergleich des zeitlichen Verlaufes der Größe λ mit und ohne Orografie ist in Abb. 3.14 abgebildet. Man erkennt deutlich, dass unter Einfluss der Orografie die Teilchengröße λ zuerst langsamer zunimmt als im Fall ohne Bodenstruktur. Dies beruht auf der Tatsache, dass sich die kinetische Energie nicht nur in der Größenveränderung $\dot{\lambda}$ zeigt (wie im Fall ohne Orografie), sondern auch als Resultat der Beschleunigung des Teilchenschwerpunktes q . Deshalb nimmt das Größenwachstum anfangs langsamer zu als im orografiefreien Fall, wächst jedoch stärker an, nachdem der Senkentiefpunkt überschritten ist (etwa nach 100 s). Hierbei verliert das Teilchen durch den Anstieg kinetische Energie (es wird langsamer), gleichzeitig nimmt auf Grund der Bodenstruktur die Teilchengröße

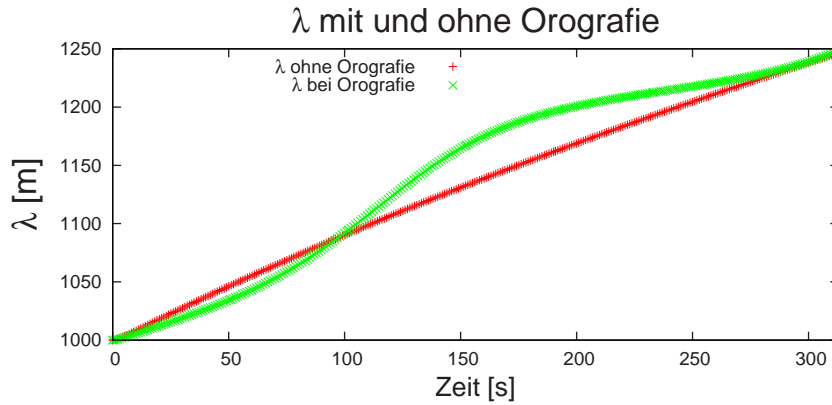


Abbildung 3.14: 4. Beispiel: Gegenüberstellung des Wachstums von λ mit und ohne Einwirkung der Orografie.

verstärkt zu (vgl. Gl. 3.57).

3.3 Numerische Adaption

3.3.1 Verlet-Zeitschema

Gauger et al. (2000) beschreiben ein einfaches, stabiles Zeitintegrationsschema zweiter Ordnung, welches speziell an die Hamiltonsche Struktur der Methode der Finiten Massen angepasst ist: Die Verlet-Methode. Hierbei handelt es sich um ein Schema vom Typ Leap-Frog.

Sowohl die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt der Teilchen q_i (Gln. 3.33 oder 3.47) als auch die der Größe des Teilchens λ_i (Gln. 3.39 oder 3.50) hat die Form

$$y'' = f(y). \quad (3.58)$$

Bei der Verlet-Methode erfolgt die zeitliche Diskretisierung zum Zeitpunkt k mit dem Zeitschritt Δt wie folgt:

$$y'_{k+\frac{1}{2}} = y'_k + \frac{\Delta t}{2} f(y_k) \quad (3.59)$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t y'_{k+\frac{1}{2}} \quad (3.60)$$

$$y'_{k+1} = y'_{k+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} f(y_{k+1}). \quad (3.61)$$

Als Startwert für y'_k wird in einem initialisierenden Schritt auf das Euler-Verfahren zurückgegriffen: $y'_k = f(y_k) \Delta t$. Der Vorteil der Verlet-Methode liegt darin, dass der Wert $f(y_{k+1})$ direkt für den nächsten Zeitschritt genutzt werden kann (als $f(y_k)$) und deshalb nicht nochmals berechnet werden muß.

Für die Diskretisierung der Integrale mittels Stützstellen sei auf Anhang A verwiesen.

3.3.2 Impulsaustausch zwischen den Teilchen

Der Hauptgedanke der Methode der Finiten Massen besteht darin, dass die einzelnen Teilchen nicht untereinander, sondern jeweils nur mit dem durch alle Teilchen erzeugten Feldern wechselwirken. Treten jedoch sehr große Beschleunigungen bei einzelnen Teilchen auf, so kann der Impulsübertrag auf das Gesamtsystem und dessen Rückwirkung auf die einzelnen Bestandteile, die Masseteilchen, oftmals nicht schnell genug erfolgen.

Als ein Beispiel sei hierbei an eine Welle gedacht, die im Flachwassersystem propagiert und nur durch ein paar zusätzliche Masseteilchen auf einer sonst ebenen Wasseroberfläche dargestellt wird. Diese zusätzlichen Teilchen erhalten bei der Initialisierung eine Anfangsgeschwindigkeit, im Gegensatz zu den restlichen Teilchen, deren Geschwindigkeiten mit Null initialisiert werden. Da sich jedoch im Flachwassersystem immer die gesamte Wassersäule bewegt, muss dieser Impuls der Zusatzteilchen auch auf die anderen Masseteilchen der sich bewegenden Wassersäulen-Teilchen übertragen bzw. aufgeteilt werden. Prinzipiell handelt es sich hierbei um ein Initialisierungsproblem, das kompensiert werden muss. Die Methode der Finiten Massen stellt zwar eine solche Rückkopplung sicher, jedoch nur über den Umweg über das Gesamtfeld, so dass auf schnelle Änderungen, speziell bei auftretenden großen Beschleunigungen, nicht schnell genug reagiert werden kann. Dies kann dazu führen, dass die Simulation mitunter dem physikalischen Problem nicht gerecht wird. Aus diesem Grund ist es nützlich, den Impulsaustausch zwischen den einzelnen Massepackchen sicher zu stellen. Deshalb wurde ein zusätzlicher Parameter, der Impulsaustauschparameter δ eingeführt. Er ermöglicht den Impulsaustausch zwischen den Teilchen, indem er die einzelnen Teilchengeschwindigkeiten v_i in Richtung des Geschwindigkeitsfeldes $\bar{v} = \sum_{i=1}^N \chi_i v_i$ (s. Gl. 2.21) zieht

$$\dot{q}_{i\text{mod}} = \dot{q}_i - \delta(\dot{q}_i - \bar{v}). \quad (3.62)$$

Ebenso modifiziert er die Größenänderung der einzelnen Massepakete ($\dot{\lambda}_i$).

$$\dot{\lambda}_{i\text{mod}} = \dot{\lambda}_i(1 - \delta) \quad (3.63)$$

An Gleichung 3.63 erkennt man, dass mit der Einführung des Impulsaustauschparameters δ eine Dämpfung in das System eingeführt wurde. Sie repräsentiert die Dissipation der kinetischen Energie, denn im betrachteten System wird die thermische Energie nicht berücksichtigt. Da das System selbst ungedämpft ist und auch durch die verwendete Numerik keine Dämpfung auftritt, wird die Einführung eines Impulsaustauschparameter notwendig, um die Energieverluste, die durch Erzeugung von Wärme in einem realen System auftreten, mit einzukalkulieren. Die Konstruktion des Impulsaustauschparameters δ erfolgte derart, dass sichergestellt wurde, dass der Impuls durch die Modifikation erhalten wurde (s. Anhang Kapitel B). Dabei wurde in Kauf genommen, dass die kinetische Energieerhaltung verletzt wird.

Das Verfahren wurde speziell auf das verwendete Zeitschema (siehe 3.3.1) ausgerichtet und ergibt Änderungen in den Ableitungen für die Schwerpunktsvariable q_i (zum Zeitpunkt $k + 1$).

$$\dot{q}_{i\text{mod},k+1} = \dot{q}_{i,k+1} - \delta(\dot{q}_{i,k+1} - \bar{v}) \quad (3.64)$$

$$\ddot{q}_{i\text{mod},k+1} = \frac{2}{\Delta t}[\dot{q}_{i\text{mod},k+1} - \dot{q}_{i,k+0.5}] \quad (3.65)$$

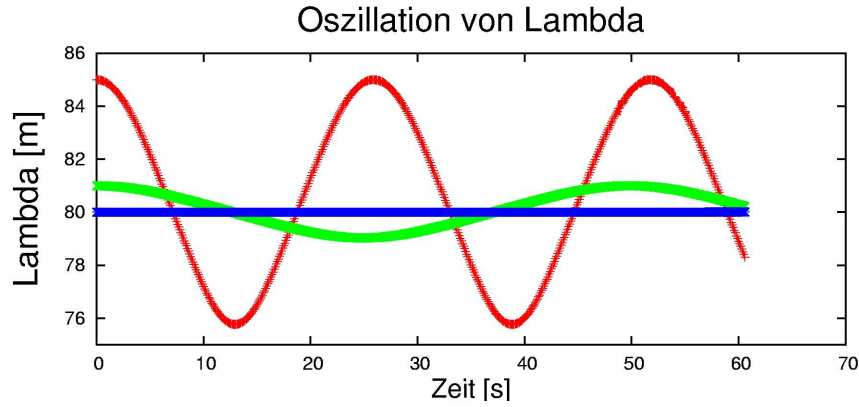


Abbildung 3.15: Ideale Ausgangskonfiguration für λ : drei Simulationen, in denen für das Teilchen bei $x = 4020$ m seine Größe λ gegen die Zeit aufgetragen ist.

Hierbei steht Δt für die Größe des Zeitschrittes, k für den aktuellen und damit $k + 1$ für den frisch berechneten und zu modifizierenden Zeitpunkt. Ferner stellt \bar{v} das Geschwindigkeitsfeld und $\dot{\lambda}_{i,k+0.5}$ bzw. $\dot{q}_{i,k+0.5}$ die Ableitungen von q_i und λ_i zum Zwischenzeitpunkt $k + 0.5$ dar.

Zum Erhalt der $(k+1)$ -ten Teilchengrößenableitungen wurden, wiederum in Abgleich mit dem Verlet-Schema, folgende Ableitungen mit δ modifiziert:

$$\dot{\lambda}_{i,mod,k+1} = \dot{\lambda}_{i,k+1}(1 - \delta) \quad (3.66)$$

$$\ddot{\lambda}_{i,mod,k+1} = \frac{2}{\Delta t} [\dot{\lambda}_{i,mod,k+1} - \dot{\lambda}_{i,k+0.5}]. \quad (3.67)$$

Für die numerischen Simulationen wurden Werte für den Impulsaustauschparameter zwischen $0 \leq \delta \leq 0.10$ verwendet.

3.3.3 Bestimmung der optimalen Anzahl und Anfangsgröße der Massepäckchen

Wie schon bei den Beispielen in Kapitel 3.2.1.4 angedeutet, schwingen die Größen der Masseteilchen um eine Nullage herum. Dies rührt daher, dass der Zustand $\ddot{\lambda}_i = 0$ bei $\ddot{q}_i = 0$ numerisch nicht auflösbar ist. Insofern fängt die Größe der Teilchen λ_i , bei gegebener Teilchenposition q_i an zu schwingen. Dies wirft die Frage auf, welche Teilchengröße für das gegebene Problem die optimale zur Initialisierung wäre.

Es hat sich herausgestellt, dass, sollte man mit einer nahezu beliebigen Initialisierung anfangen, die Teilchen um die optimale Position herum schwingen. Im Standard-Versuchsaufbau (s. Kapitel 4.1), einem Wassertank der Länge $L = 10.000$ m mit periodischen Randbedingungen, werden bei glatter Wasseroberfläche, also im stationären Zustand, 3 Simulationen durchgeführt, wobei alle Teilchen i für jede Simulation dieselbe Größe λ haben.

In Abb. 3.15 sind die Ergebnisse für das Teilchen bei $x = 4020$ m dargestellt für die Ausgangsgrößen von $\lambda = 80$ m, 82 m und 85 m in den ersten 70 Sekunden des Modelldurchlaufes. Man erkennt deutlich, dass alle drei Ausgangsgrößen um die jeweilige Nullage bei 80 m herum schwingen. Betrachtet man die Werte für $\lambda = 80$ m, so erkennt man auch

hier eine sinusförmige Schwingung, die um die Nullage bei 80 m herum oszilliert, jedoch eine sehr kleine Amplitude hat (< 0.05 m). Ferner haben die Versuche ergeben, dass alle Teilchen mit derselben Frequenz schwingen, jedoch mit jeweils unterschiedlicher Phase; so verlaufen die Bewegungen von benachbarten Teilchen immer entgegengesetzt. Insofern kann man für jeden Versuchsaufbau die passenden λ_i für die Teilchen im stationären Zustand ermitteln, indem man die Nullage der Schwingung eines Teilchens als Ausgangsgröße für alle λ_i wählt. Die Oszillation der Teilchen hat aufgrund der kleinen Amplitude im optimierten Fall keine negative Auswirkungen auf das Gesamtsystem – es handelt sich hierbei um ein stabiles, wenn auch nicht attraktives Gleichgewicht.

Zur Initialisierung wurden Massepäckchen gleicher Größe gewählt, eine Konfiguration, die nicht zwingend notwendig ist, aber den Vorteil hat, dass die Teilchen einer Wassersäule nicht unterschiedliche Beschleunigungen aufgrund ihrer Größe erfahren.

In verschiedenen Simulationen wurde versucht zu ermitteln, mit welcher Dichte die einzelnen Massepäckchen sinnvollerweise zu initialisieren seien. Einerseits gilt, je größer die Überlappung der einzelnen Massepäckchen im Anfangszustand ist, desto glatter ist die erzeugte Wasseroberfläche. Andererseits bedeuten sehr kleine Abstände bei der Initialisierung auch, dass mehr Massepäckchen für die Simulation benötigt werden und deshalb auch der Rechenaufwand mit zunehmender Massepäckchenzahl steigt. Dennoch sollte die Störung selbst noch auflösbar sein. Aus diesem Grund wurde die Initialisierungsdichte der Teilchenschwerpunkte auf 4 m festgelegt, dies ermöglicht bei äquidistanter Initialisierung (Gleichverteilung) eine Wasserhöhe von 100 m im Versuchsaufbau, so dass Signale mit einer Amplitude von etwa $h_s = 10$ m möglich waren, die sich über 10 Wellenlängen im System ausbreiten konnten, bevor sie den Beckenrand erreichten.

3.3.4 Berechnung der optimalen Repräsentation der gewünschten Anfangsbedingungen im simulierten Experiment

In mathematischer Hinsicht bilden die Lagrangeschen Gleichungen ein System von $2N$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für jeweils N unbekannte Funktionen $q_i(t)$ und $\lambda_i(t)$. Die allgemeine Lösung eines solchen Systems enthält $2 * 2N$ prognostische Variablen. Zu Ihrer Festlegung und damit zur vollständigen Bestimmung der Bewegung des Systems ist die Kenntnis der Anfangsbedingungen notwendig, die den Zustand des Systems zu irgendeinem gegebenen Zeitpunkt charakterisieren, d.h. die Kenntnis der Anfangswerte aller Koordinaten, Teilchengrößen und deren Geschwindigkeiten.

Insofern scheint es beinahe unmöglich, die optimale Ausgangskonfiguration eines Problems zu finden, und man steht vor der Herausforderung, den gewünschten Anfangsbedingungen möglichst gerecht zu werden. Ferner, obwohl die verwendeten Splines sehr gute Approximationseigenschaften besitzen, muss man beachten, dass mit zunehmender Genauigkeit in Bezug auf die Anpassung der Anfangsbedingungen, repräsentiert durch eine hohe Splinanzahl (d.h. Teilchenanzahl), auch gleichzeitig die Rechenzeit ansteigt. Beschränkt man sich nun auf eine bestimmte Teilchenanzahl, so kann man in der Regel die gewünschten Anfangsbedingungen nicht exakt realisieren.

Im Gegensatz zu Eulerschen Methoden, bei denen sich die Randbedingungen im Ansatz relativ einfach realisieren lassen, benötigt man zur Initialisierung der Simulation bei der FMM ein Iterationsverfahren, um die Teilchenpositionen, -größen und deren Ableitungen

zum Zeitpunkt $t = 0.00$ s zu bestimmen. Es handelt sich hierbei um ein Extremwertproblem, um beliebige Anfangszustände der Wasseroberfläche $h(x, t_0)$ und der Anströmgeschwindigkeit $u(x, t_0)$ mit dem Variablensatz $q_i, \dot{q}_i, \lambda_i$ und $\dot{\lambda}_i$ darstellen zu können:

$$\min |h(x, t_0)| = \frac{1}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\lambda_i} \psi_i \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i(t)) \right)^2 \quad (3.68)$$

$$\min |u(x, t_0)| = \sum_{i=1}^N \chi_i v_i^2 \quad (3.69)$$

Um die Ausgangskonfiguration der Massepäckchen z.B. bei der Simulation „sinusförmige Oberfläche“ (s. Kapitel 4.2.2) möglichst genau zu bestimmen, wurde die Methode des Steilsten Gradienten gewählt (s. Anhang Kapitel C). Sie dient dazu, iterativ die richtige Ausgangskonfiguration für die Initialisierung der Massepäckchen zu berechnen, auf dass sich eine sinusförmige Oberfläche im Flachwassersystem ergibt. Mit dem daraus resultierendem Experiment und der analytischen Lösung der Flachwassergleichung kann man schlussendlich die Ergebnisse qualitativ vergleichen. Berechnet wird hierbei der Gradient einer vorher definierten Maßzahl G , dessen Ableitungen nach den einzelnen Teilchenpositionen $q_i(t_0)$ minimiert werden sollen. Mit Hilfe der Iteration werden die Teilchenpositionen $q_i(t_0)$ bestimmt, bei denen die daraus resultierende Wasseroberfläche $h_{sim}(x, \vec{q}(t_0))$ am besten der vorgegebenen Sinusfunktion entspricht. Betrachtet werden also die Maßzahl (vgl. Gl. C.1)

$$G = \int \left(h_{sim}(x, \vec{q}(t_0)) - \sin(x) \right)^2 dx. \quad (3.70)$$

und, gemäß der Methode, der Gradient, also die Ableitung nach den Teilchenpositionen $q_i(t_0)$ (vgl. Gl. C.3):

$$\frac{\partial}{\partial q_i} G = \int 2 \left(h_{sim}(x, \vec{q}) - \sin(x) \right) dx. \quad (3.71)$$

Setzt man nun die Formel für die Berechnung der Höhe (Gl. 3.17) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_i} G = \int 2 \left[\left[\frac{1}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\lambda_j} \psi \left(\frac{1}{\lambda_j} (x - q_j) \right) \right] - \left[b \sin \left(\frac{x}{a} \right) + h_0 \right] \right] \\ \cdot \left\{ \frac{1}{\tilde{\varrho}_{0,2}} \frac{-m_i}{\lambda_i^2} \psi' \left(\frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) \right) \right\} dx. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Hierbei steht $\tilde{\varrho}_{0,2}$ für die Dichte des Wassers, h_0 für die Waserhöhe ohne Signal, b für die Amplitude der Welle und a für deren Wellenlänge. Durch Suche des Minimums erhält man die gewünschten Teilchenpositionen q_i . Analog erhält man auch die Anfangsgeschwindigkeiten der Teilchen.

3.3.5 Geschwindigkeit des Algorithmus

Da im Rahmen dieser Dissertation die Methode und deren Umsetzung im Vordergrund stand, wurde das Hauptaugenmerk nicht auf eine zeitoptimierte Programmierung gerichtet. Bisher erfolgt also die Berechnung der Beschleunigungen der Teilchen in der Größenordnung N^2 , die Laufzeit des Programmes steigt daher mit zunehmender Teilchenanzahl

quadratisch an. Dies hat seinen Grund in der noch als Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung implementierten Form der Gleichung (3.33) und (3.39), bzw. mit Orografie (3.47) und (3.51), weil jeweils zwei Schleifen über alle Teilchen gerechnet werden.

Dies wird sich in einer zukünftigen Version des Programmes bis auf die Ordnung N verringern, indem das aus allen Teilchen generierte Hintergrundfeld ($\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\lambda_j} \psi_j$) zuerst separat berechnet wird, um schließlich die Beschleunigung des Teilchens i aus der Wechselwirkung des Teilchens mit dem Hintergrundfeld zu erhalten. Bei der momentan verwendeten Teilchenanzahl von $N = 2500$ ist damit mit einer Verkürzung der Rechenzeit von fast 50% zu rechnen.

Aufgrund dieser N^2 -Abhängigkeit ist der Algorithmus im Augenblick noch ineffizient. Berechnungen von 100 Modellsekunden dauern auf einem gewöhnlichen Linux-PC mit 2.8GHz Prozessortakt und 1024MB RAM zwischen 5 bis 10 Stunden, je nach Zeitschrittgröße $\Delta t = 0.05$ s und $\Delta t = 0.10$ s.

3.4 Beschreibung des Vergleichsmodells

Zur Evaluierung des FMM-Systems wird das von Piotr Smolarkiewicz entwickelte Programm MPDATA in der eindimensionalen Version der Flachwassergleichungen (siehe Smolarkiewicz und Margolin (1998)) verwendet. MPDATA (Multidimensional Positive Definite Advection Transport Algorithm) ist ein Finite-Differenzen-Algorithmus, um die Advektionsterme in Fluid-Gleichungen zu approximieren. MPDATA hat eine Genauigkeit in zweiter Ordnung, ist positiv definit, konservativ und effizient bezüglich der Rechenzeit. Ursprünglich als einfaches Advektionsschema eingeführt, hat es sich mittlerweile als allgemeine Näherung zur Integration von Erhaltungssätzen geophysikalischer Fluide von mikrobis zur planetaren Skala entwickelt. In seiner Kernstruktur ist MPDATA ein iteratives Verfahren. Im ersten Schritt verwendet es das Donor-Cell-Schema⁸, welches einerseits positiv definit ist, andererseits jedoch nur eine Genauigkeit erster Ordnung liefert. Im zweiten Schritt wird die Genauigkeit der Berechnung erhöht, indem der Rundungsfehler (in der 2.Ordnung) des ersten Schrittes abgeschätzt und kompensiert wird. Weitere Schritte können dann durchgeführt werden, um auch die verbleibenden Fehler zu Eliminieren und näherungsweise zu auszugleichen.

Ausgehend von den Flachwassergleichungen in der eindimensionalen, eulerschen Form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (3.74)$$

werden die beiden Gleichungen, nachdem (3.73) mit h und (3.74) mit u multipliziert wurden addiert und man erhält die Advektionsgleichung in der Flussform:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \Psi u = -gh \frac{\partial h}{\partial x} =: F^\Psi \quad (3.75)$$

Hierbei steht $\Psi = hu$ für den Fluss, h für die Wasserhöhe, u für die Geschwindigkeit in x -Richtung und g für die Erdbeschleunigung.

⁸ebenfalls in der englischen Literatur auch als upstream-approximation bezeichnet.

Die dazugehörige Gleichung für die Höhenveränderung lautet:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} h u = 0 =: F^h. \quad (3.76)$$

Das bei MPDATA zugrundeliegende Gitter besteht im Prinzip aus zwei ineinander geschachtelten Gittern, die um einen halben Gitterabstand voneinander verschoben sind (engl. staggered grid), so dass im Folgenden die Zellenmittelpunkte (d.h. die Beiträge des ersten Gitters) mit ganzen Zahlen i und die Zelleneckpunkte (die Beiträge des zweiten Gitters) mit halbzahlgigen Indizes $i \pm 0.5$ beschrieben werden. Der erste Schritt in MPDATA basiert auf der Donor-Cell-Approximation, über die der Fluss Ψ um Zeitpunkt $n + 1$ ermittelt wird:

$$\Psi_i^{n+1} = \Psi_i^n - [F(\Psi_i^n, \Psi_{i+1}^n, U_{i+0.5})] - F(\Psi_{i-1}^n, \Psi_i^n, U_{i-0.5})] \quad (3.77)$$

Die Flussfunktion F ist definiert zu

$$F(\Psi_L, \Psi_R, U) = [U]^+ \Psi_L + [U]^- \Psi_R \quad (3.78)$$

und ist eine Funktion der lokalen Courantzahl U

$$U := \frac{u \delta t}{\delta x}, \quad (3.79)$$

wobei δt der Zeitschritt in der Simulation, δx die Gitterlänge und $[U]^+$ bzw. $[U]^-$ die nichtnegativen bzw. nichtpositiven Teile der Courantzahl darstellen, für welche gilt:

$$[U]^+ = 0.5 (U + |U|) \quad (3.80)$$

$$[U]^- = 0.5 (U - |U|). \quad (3.81)$$

Geht man der Einfachheit halber von einer konstanten Geschwindigkeit und einem nichtnegativen Ψ aus, so stellt man mit Hilfe einer einfachen Abbruchanalyse nach der zweiten Ordnung fest, dass das Verfahren (3.77) die Advektions-Diffusionsgleichung sehr viel genauer annähert als die reine Advektionsgleichung $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(u\Psi)$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(u\Psi) + \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right), \quad (3.82)$$

mit

$$K = \frac{(\delta x)^2}{2 \delta t} (|U| - U^2). \quad (3.83)$$

Daraus folgt, dass Gl. (3.77) die Advektionsgleichung (3.75) approximiert, mit einem Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(2)$. MPDATA versucht nun, den zweiten Term in (3.82) zu approximieren, indem eine Donor-Cell-Näherung auf den Fehlerterm angewendet wird. Da dieser Fehlerterm so direkt nicht dazu verwendet werden kann, wird er zuerst umgeschrieben zu:

$$error^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v^{(1)} \Psi \right) \quad (3.84)$$

die Variable v stellt hierbei eine Pseudo-Geschwindigkeit dar:

$$v^{(1)} = \frac{(\delta x)^2}{2 \delta t} (|U| - U^2) \frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (3.85)$$

Der obere Index (1) zeigt, dass es sich hierbei um die erste Näherung zur Reduktion des Fehlers handelt. Mit Hilfe weiterer Iterationen wird nun der Fehlerterm so lange angenähert, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht wird.

Kapitel 4

Experimentdesign und Simulation

4.1 Dimensionierung des Problems

Als Versuchsaufbau für die Simulationen dient ein $L = 10.000$ m langer Wassertank¹ mit periodischen Randbedingungen. Um die Flachwasserbedingungen zu gewährleisten, wird von einer charakteristischen Länge des Signals ausgegangen, die ungefähr im Größenbereich um 1.000 m liegt. Die durchschnittliche Wasserhöhe beträgt im Falle des stationären Zustandes einer glatten Oberfläche $D = 100$ m, die durch die Verwendung von $N = 2500$ Masseteilchen realisiert wird. Initialisiert wird in allen Experimenten mit Teilchen, die ihre Größe ändern können, also Teilchen mit $\lambda = \lambda(t)$. Aus diesen Größen lässt sich dann die transportierte Masse der einzelnen Teilchen bestimmen, welche für alle Teilchen gleich groß ist:

$$m_i = \frac{DL\tilde{\varrho}_{0,2}}{N} = 400 \text{ kg} \quad (4.1)$$

wobei $\tilde{\varrho}_{0,2} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ für Wasser gilt. Alle Teilchen werden zum Zeitpunkt $t_0 = 0.0$ s mit der Größe $\lambda(t_0) = 48$ m und im Abstand von $\Delta x_{ini} = 4$ m voneinander initialisiert.

4.1.1 Wahl des Versuchsaufbaus

Für diesen Versuchsaufbau wurde eine Konfiguration gewählt, die die vorhandenen Rechenleistungen optimal ausnutzt (s. Abb. 4.1). Dabei wird bewusst in Kauf genommen, dass die für Flachwassergleichungen übliche Relation zwischen Wasserhöhe H und charakteristischer Länge des Signals L_c verletzt wird. Üblicherweise wird hier von einem Faktor > 20 ausgegangen ($\frac{L_c}{H} > 20$, vgl. Kapitel 3.1), der in diesem Versuchsaufbau nicht erreicht wird. Dennoch wird mit diesen Simulationen das Verhalten des Systems deutlich und einige Testläufe mit längeren Signalen brachten keinen Unterschied in der Phasengeschwindigkeit c , so dass keine qualitativen Änderungen in den Ergebnissen zu erwarten sind.

¹im Folgenden auch als Becken bezeichnet

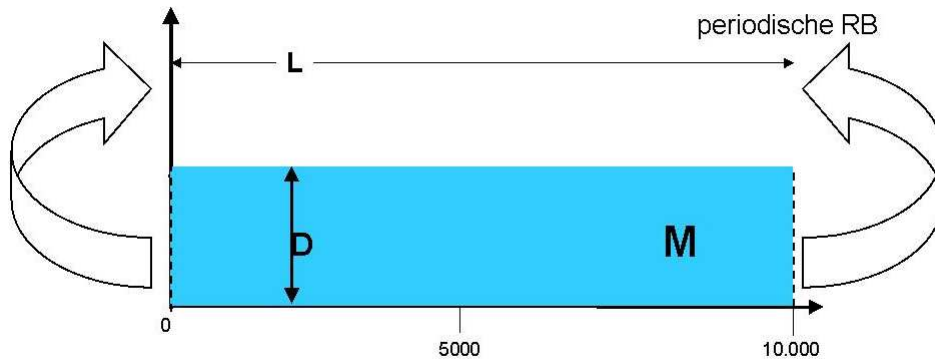


Abbildung 4.1: Versuchsaufbau: Wasserbecken mit periodischen Randbedingungen der Länge $L = 10.000$ m, einer durchschnittlichen Wasserhöhe von $D = 100$ m und damit der Gesamtmasse $M = DL\tilde{\rho}_{0,2} = 1000000$ kg.

4.2 Verschiedene Konstellationen

Zur Überprüfung des Algorithmus und der Implementierung wurden verschiedene Experimente durchgeführt. Im Abschnitt (4.2.1) wird ein zerfließender Wasserhügel betrachtet, der sehr einfach, noch ohne Inanspruchnahme eines Iterationsverfahrens initialisiert wird. Die Energieerhaltung und der Effekt des Impulsaustauschparameters δ werden beide diskutiert. Zur Überprüfung der Amplitude der Wellen und der Vergleichsmöglichkeit mit der analytischen Lösung wird eine sinusförmige Oberfläche in Abschnitt 4.2.2 generiert. Ferner werden Simulationen mit Orografie durchgeführt (Kapitel 4.2.3). Aufgrund der periodischen Randbedingungen werden in der Regel die Simulationen nach 100 s abgebrochen, um eine Überschneidung des Signals, hervorgerufen durch die periodischen Randbedingungen, zu vermeiden.

4.2.1 Zerfließen eines Wasserberges

4.2.1.1 Überblick

In dieser Simulation soll das Verhalten des Systems bei relativ leicht zu verwirklichenden Anfangsbedingungen studiert werden. Betrachtet wird das Zerfließen eines ca. 13 m hohen Wasserberges in der Mitte des Wasserbeckens, der durch 5 zusätzliche Teilchen, die im Abstand von 32 m initialisiert wurden, dargestellt wird. Die Anfangsgeschwindigkeit aller Masseteilchen beträgt $v_i(t_0) = 0$ m/s, ihre Größe $\lambda_i(t_0) = 48$ m und deren Wachstum $\dot{\lambda} = 0$ m/s. Die Zeitschrittgröße der Simulation betrug $\Delta t = 0.10$ s und der Impulsaustauschparameter $\delta = 0.10$. Abbildung 4.2 zeigt den Ausschnitt aus dem Wassertank für die ersten Zeitschritte ($t = 0.00$ s, $t = 1.00$ s, $t = 2.50$ s, $t = 5.00$ s, $t = 10.20$ s). Man erkennt deutlich die im Laufe der Zeit sich ausbreitende Welle nach rechts und links. Da die Anfangskonfiguration des Berges durch eine relativ kleine Anzahl von Massepäckchen dargestellt wird, kann man die einzelnen Teilchen, die den Wasserberg bilden, noch deutlich in der Abbildung bei den ersten Zeitschritten unterscheiden. Außerdem bemerkt man, dass

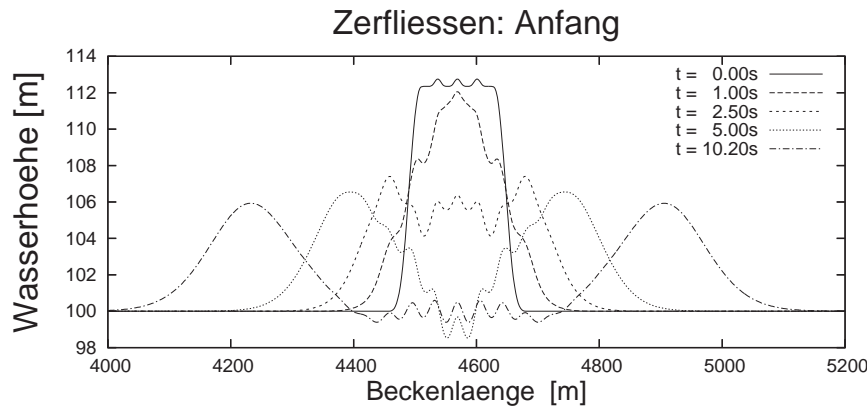


Abbildung 4.2: Bei der Initialisierung des Wasserberges der Höhe 13 m wird eine nicht glatte Oberfläche, repräsentiert durch 5 Zusatzteilchen vorgegeben. Dargestellt ist der zerfließende Wasserberg zwischen $t = 0.00$ s und $t = 10.20$ s bei einer Zeitschrittgröße $\Delta t = 0.10$ s und mit dem Impulsaustauschparameter $\delta = 0.10$.

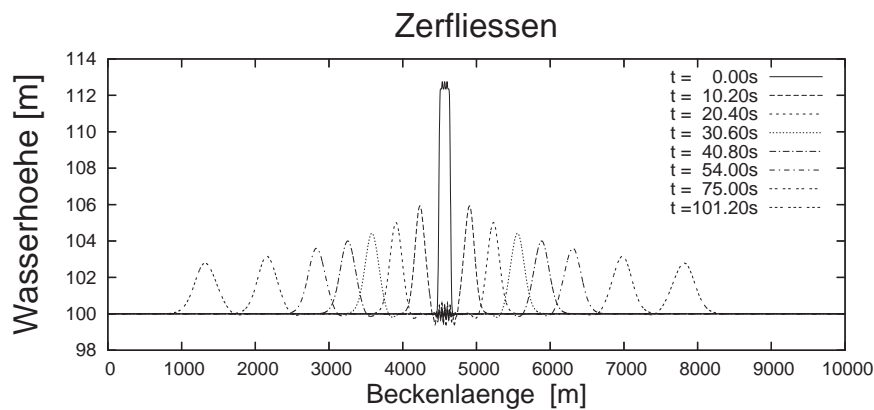


Abbildung 4.3: Ein Wasserberg von etwa 13 m Höhe wird sich selbst überlassen und zerfließt. Gezeigt ist hier die Wasseroberfläche der sich ausbreitenden Wellen zu den Zeitpunkten $t = 0.00$ s, $t = 10.20$ s, $t = 20.40$ s, $t = 30.60$ s, $t = 40.80$ s, $t = 54.00$ s, $t = 75.00$ s und $t = 101.20$ s, bei einer Zeitschrittgröße $\Delta t = 0.10$ s und mit dem Impulsaustauschparameter $\delta = 0.10$.

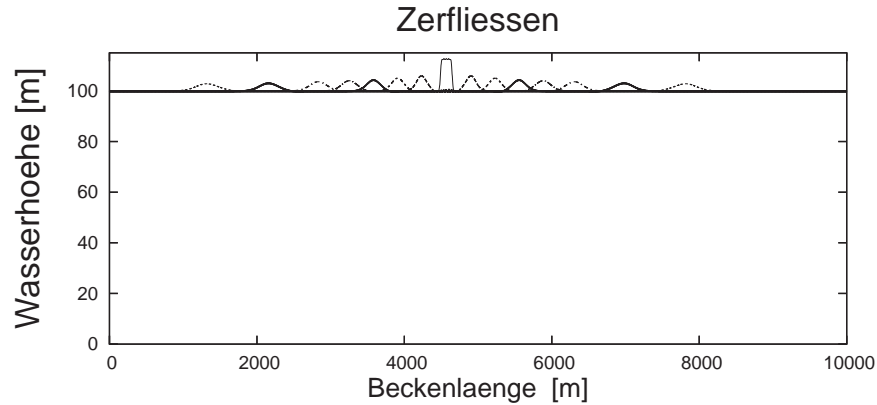


Abbildung 4.4: Hier ist die sich nach rechts und links ausbreitende Welle nach einer Initialisierung als Wasserberg zu verschiedenen Zeitpunkten dargestellt. Im Gegensatz zu Abb. 4.3 ist zum Größenvergleich auch die darunterliegende Wassersäule berücksichtigt worden. Die geplotteten Zeitpunkte $t = 0.00$ s, $t = 10.20$ s, $t = 20.40$ s, $t = 30.60$ s, $t = 40.80$ s, $t = 54.00$ s, $t = 75.00$ s und $t = 101.20$ s, bei $\Delta t = 0.10$ s und mit $\delta = 0.10$ lassen sich leicht dem jeweiligen sich nach rechts bzw. links ausbreitenden Wellenberg zuordnen.

sich erst mit zunehmender Zeit eine glatte Wasserwelle ausbildet. Dies liegt daran, dass die Teilchen, die den Wasserspiegel bei $H = 100$ m generieren, fast überall ausgeglichen sind. Im Bereich des Berges jedoch erhalten benachbarte Wassersäulen unterschiedliche Beschleunigungen durch die zusätzlichen Teilchen, d.h. durch die dort herrschenden unterschiedlichen Teilchenanzahldichten. Erst im Laufe der Zeit werden diese Unterschiede u.a. durch die Größe der Teilchen und den Impulsübertrag auf die anderen Teilchen gemindert. Dies äußert sich in der Glättung der Oberfläche der nach rechts und links auslaufenden Wellen.

Möchte man eine realistischere Ausgangssituation für das Zerfließen eines Wasserberges generieren, d.h. eine Wasseroberfläche vorgeben, bei der man nicht jedes einzelne den Berg bildende Teilchen erkennen kann, so ist dies nur durch eine Optimierung bei der Initialisierung der Teilchen möglich. Dies geschieht z.B. im Rahmen des Experiments „Sinusförmige Oberfläche“ (s. Kap. 4.2.2) mit Hilfe des Optimierungsverfahrens „Methode des Steilsten Gradienten“ (s. Anhang C). Das entspricht der Initialisierung von Wettervorhersagemodellen.

In Abb. 4.3 ist der weitere zeitliche Verlauf der sich ausbreitenden Wellen für Werte zwischen $t = 10.20$ s und $t = 101.20$ s dargestellt. Bemerkenswert ist die vollständig ruhende Oberfläche nach Durchzug der Wellenfront, mit Ausnahme des Initialisierungsgebietes. In diesem Versuch wurde ebenfalls die Phasengeschwindigkeit ermittelt, welche mit 31.30 m/s im Rahmen der theoretischen Erwartung ($c_{theo} = 31.32$ m/s) liegt (vgl. Diskussion im Abschnitt 4.2.1.4).

Abb. 4.4 zeigt eine Panoramaaufnahme des ganzen Tanks. Deutlich ist zu erkennen, dass die sich ausbreitende Welle eine Amplitude h_s hat, die wesentlich kleiner ist als die darunterliegende Wassersäule H . Die Flachwasserbedingung $h \gg h_s$ ist somit erfüllt. Beendet wurde das Experiment bei ca. 100 Modellsekunden, einem Zeitpunkt, bei dem zu erwarten war, dass die auseinanderlaufenden Wellen sich noch nicht wieder durch die vom Versuchsaufbau geforderten periodischen Randbedingungen überlagern würden.

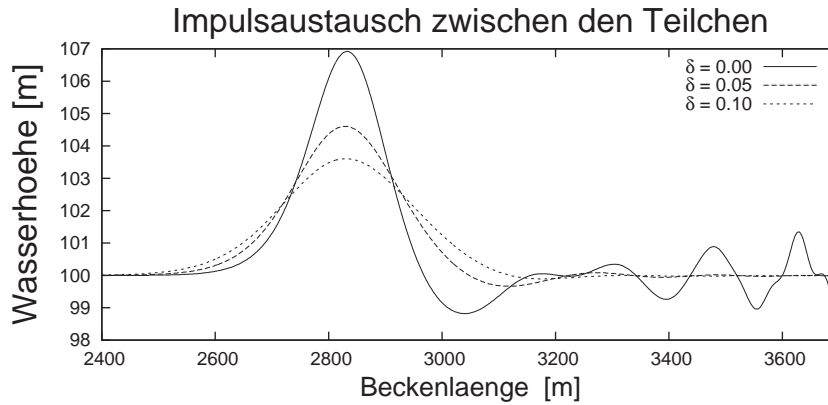


Abbildung 4.5: Auswirkungen der Wahl des Impulsaustauschparameters δ auf die Wasseroberfläche zum Zeitpunkt $t = 54.00$ s bei einer Zeitschrittgröße von $\Delta t = 0.10$ s: Dargestellt ist mit der größten Amplitude der Fall ohne Impulsaustauschparameter ($\delta = 0.00$), mit mittlerer Amplitude der Fall $\delta = 0.05$ und mit der kleinsten Amplitude der Fall $\delta = 0.10$.

4.2.1.2 Auswirkungen des Impulsaustauschparameters δ auf die Simulation

Wie schon in Kapitel 3.3.2 angesprochen, ist es sinnvoll, den Impulsaustausch zwischen den einzelnen Massepäckchen zu gewährleisten. Dazu wurden Simulationen durchgeführt mit verschiedenen großen Werten des dimensionslosen Impulsaustauschparameters δ , die in Abb. 4.5 dargestellt sind. Wieder wird hier nur ein Ausschnitt des $L = 10.000$ m langen Beckens gezeigt. Für den Zeitpunkt $t = 54.00$ s bei einer Zeitschrittgröße von $\Delta t = 0.10$ s wurden drei verschiedene Fälle dargestellt. Hierbei erkennt man, dass für den Fall ohne Impulsaustausch ($\delta = 0.00$) Schwingungen das System dominieren, welche zum Initialisierungsgebiet des Wasserberges hin zunehmen, die jedoch bereits bei kleinem Impulsaustausch ($\delta = 0.05$) verschwinden. Dennoch hat man auch in diesem Fall noch eine Asymmetrie des Wellenberges in der Ausbreitungsrichtung, so dass für die folgenden Simulationen ein Impulsaustauschparameter von ($\delta = 0.10$) gewählt wurde. δ noch weiter zu erhöhen ist jedoch nicht sinnvoll, denn der Impulsaustausch sollte nicht das System dominieren.

Energiebetrachtung Wie in Kapitel 2.1.3.2 bereits angesprochen, wird in der Methode der Finiten Massen die Energie erhalten. Sie kann damit als ein Qualitätskriterium der numerischen Simulation bewertet werden. In Rahmen der Simulation „Zerfließen“ wurde die Energie ausgehend von verschiedenen Werten des Impulsaustauschparameters δ betrachtet. Dieser steht für die Energiedissipation, die in der Methode der Finiten Massen, wie sie in dieser Dissertation verwendet wird, nicht berücksichtigt wird. In Abbildung 4.6 ist dieser zeitliche Verlauf als prozentuale Abweichung bezogen auf das ruhende System dargestellt. Man erkennt, dass ohne Impulsaustauschparameter ($\delta = 0.0000$) das System seine Gesamtenergie erhält, jedoch mit zunehmender Größe von δ das System an Energie verliert, eine Eigenschaft, die durchaus nachvollziehbar ist, denn mit der Einführung des Impulsaustauschparameters wird den Teilchen kinetische Energie speziell bei der λ_i -Modifikation genommen, die in die hier nicht in die Betrachtung eingehende Wärmeenergie umgewandelt wird. Ohne Impulsaustauschparameter jedoch wird das System im Laufe der Zeit instabil. Abweichungen von der Gesamtenergie von weniger als 0.006%

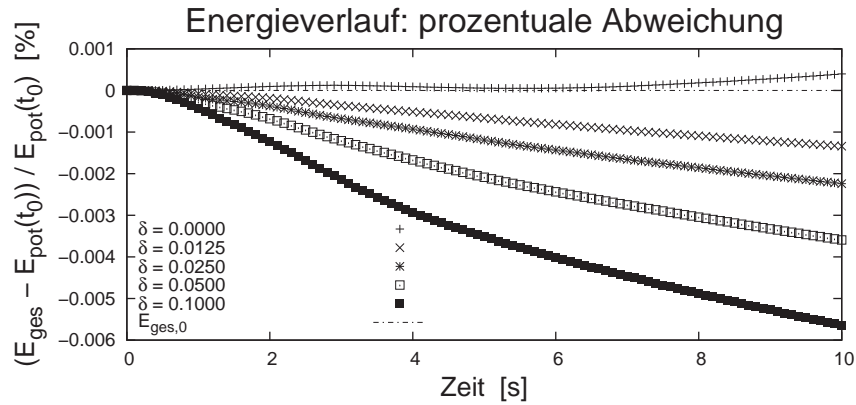


Abbildung 4.6: Energieverlauf: geplottet ist die prozentuale Abweichung der Gesamtenergie E_{ges} zum Ausgangswert der potentiellen Energie $E_{pot}(t = 0)$ (das entspricht dem ruhenden System) für das System „Zerfließen“ im zeitlichen Verlauf für verschiedene Größen des Impulsaustauschparameters $\delta = 0.0000$, $\delta = 0.0125$, $\delta = 0.0250$, $\delta = 0.0500$ und $\delta = 0.1000$ für die Zeitschrittgröße $\Delta t = 0.10$ s. Ebenso ist der Referenzwert von $E_{pot}(t = 0)$ als Gerade dargestellt.

in den ersten 10 Sekunden, wie sie hier unter Einsatz des Impulsaustauschparameters vorkommen, sind gering im Vergleich zu den Fehlerwerten, welche üblicherweise in Klimamodellen auftreten. Allerdings wird im nächsten Abschnitt gezeigt, dass unter einer weitergehenden Energiebetrachtung die geeignete Wahl des Impulsaustauschparameters auch von der Wahl des verwendeten Zeitschritts abhängt.

4.2.1.3 Wahl des geeigneten Zeitschrittes

Im Gegensatz zu Eulerschen Berechnungsverfahren, bei denen es für die Größe des Zeitschrittes ein Limit gibt, das durch das CFL-Kriterium² beschrieben wird, scheint im Lagrangeschen Fall zunächst nichts dafür zu sprechen, den Zeitschritt einzuschränken. Eine solche Beschränkung dennoch einzuführen, basiert auf der Erfahrung, dass speziell für sehr große Zeitschritte die Fehler, die bei der Berechnung der Integration entstehen, ausschlaggebend für das Verhalten des Systems werden. Aus diesem Grund überprüft man, ob die Lösung bei Verkleinerung der Zeitschrittgröße die Tendenz zu einer Konvergenz zeigt. Den adäquaten Zeitschritt erhält man, indem die größtmögliche Zeitschrittgröße verwendet wird, die dieser Tendenz entspricht.

In Abbildung 4.7 ist eine sich nach links ausbreitende Welle zum Zeitpunkt $t = 54.00$ s dargestellt für verschiedene Zeitschritte ($\Delta t = 0.40$ s, $\Delta t = 0.20$ s, $\Delta t = 0.15$ s, $\Delta t = 0.10$ s und $\Delta t = 0.05$ s). Man erkennt deutlich, dass für alle fünf Zeitschrittgrößen sich die Welle fast gleich weit fortbewegt hat, also alle Zeitschrittgrößen die gleiche von den Flachwassergleichungen geforderte Phasengeschwindigkeit c liefern. Dennoch wird deutlich, dass für zu große Zeitschritte, hier $\Delta t = 0.40$ s und $\Delta t = 0.20$ s, Oszillationen erscheinen, die mit dem physikalischen Problem nicht in Einklang zu bringen sind. Man erkennt hier au-

²Das Courant-Friedrichs-Lewy-Kriterium bestimmt die maximale Länge des Zeitschrittes und sagt qualitativ aus, dass ein meteorologisches Signal pro Zeitschritt nicht weiter als eine Gittermaschenweite transportiert werden darf, da das Verfahren ansonsten instabil wird (Courant, Friedrichs und Lewy, 1928).

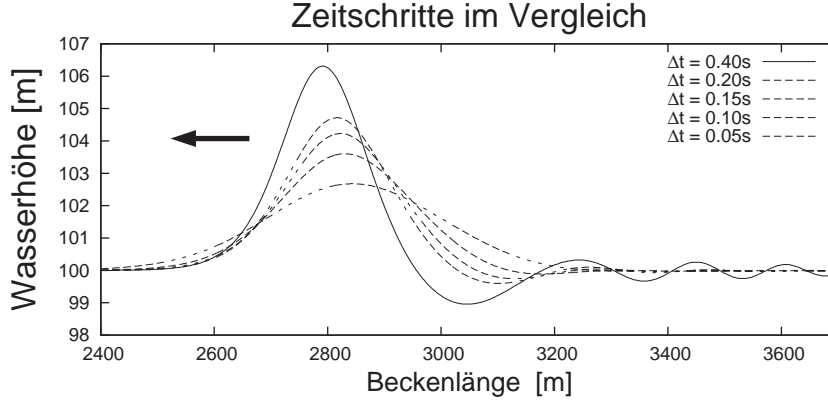


Abbildung 4.7: Bestimmung des geeigneten Zeitschrittes Δt : Eine nach links sich ausbreitende Welle bei verschiedenen Zeitschrittgrößen zum Zeitpunkt $t = 54.0$ s bei einem Impulsaustauschparameter $\delta = 0.10$. Aufgetragen sind hier mit abnehmender Amplitude die Zeitschritte $\Delta t = 0.40$ s, $\Delta t = 0.20$ s, $\Delta t = 0.15$ s, $\Delta t = 0.10$ s und $\Delta t = 0.05$ s

ßerdem deutlich, wie sich die Masseteilchen als einzelne Objekte fortbewegen. Besonders in der Mitte des Wassertanks, in dem in diesem Versuchsaufbau die Welle ihren Ursprung hat, sind diese Oszillationen sehr dominant (nicht dargestellt in Abb. 4.7).

Bemerkenswert ist ebenfalls, dass mit kleiner werdender Zeitschrittgröße die Höhe der sich ausbreitenden Welle nicht zu konvergieren scheint, sondern immer kleiner wird und die Welle sich immer weiter verbreitert.

Dies resultiert aus der Tatsache, dass die Höhe einer Flachwasserwelle charakteristisch ist für ihren Energiegehalt. Durch die Einführung des Impulsaustauschparameters δ wird jedoch der Welle bei bzw. nach jedem Zeitschritt kinetische Energie entzogen, und dies unabhängig von der Zeitschrittgröße. Aus diesem Grund sind die Amplituden der Wellen in Abb. 4.7 bei großen Zeitschritten größer als bei kleinen Zeitschritten. Um gleichwohl die Konsistenz der Zeitschritte zeigen zu können, wurde der Impulsaustauschparameter δ zeitschrittabhängig gemacht, indem ein für alle Zeitschritte gültiger Parameter $\tilde{\delta}$ eingeführt wurde, der normiert auf den Zeitschritt $\Delta t = 0.10$ s ist

$$\tilde{\delta} = \frac{\delta}{\Delta t_{t=0.10s}} \quad (4.2)$$

und damit die Einheit $[\tilde{\delta}] = \frac{1}{s}$ hat. Somit ergibt sich für den Impulsaustauschparameter δ :

$$\delta = \tilde{\delta} \Delta t, \quad (4.3)$$

und für den Fall, dass $\Delta t = \Delta t_{t=0.10s}$ ist, wieder der ursprüngliche Wert für δ in der Modifikation. Diese Modifikation ist durchaus konform mit der Herleitung des Impulsaustauschparameters, wie man in Anhang B leicht erkennen kann, wenn man für $\delta = \frac{\delta}{\Delta t_{t=0.10s}} \Delta t$ einsetzt. In Abb. 4.8 ist der Verlauf der Gesamtenergie für die Zeitschrittgrößen $\Delta t = 0.30$ s, $\Delta t = 0.20$ s, $\Delta t = 0.10$ s, $\Delta t = 0.05$ s und $\Delta t = 0.01$ s als prozentuale Abweichung der Gesamtenergie ($E_{kin} + E_{pot}$) von der potenziellen Energie des ruhenden Untergrundes ($E_{pot}(t_0)$) dargestellt. Man erkennt, dass alle Kurven zu einer konvergieren, die berechnete Energie also gleichmäßig abnimmt, wie in Abschnitt 4.2.1.2 erläutert. Die ersten 10 s des Energieverlaufs sind in Abb. 4.9 geplottet. Man stellt fest, dass speziell bei den

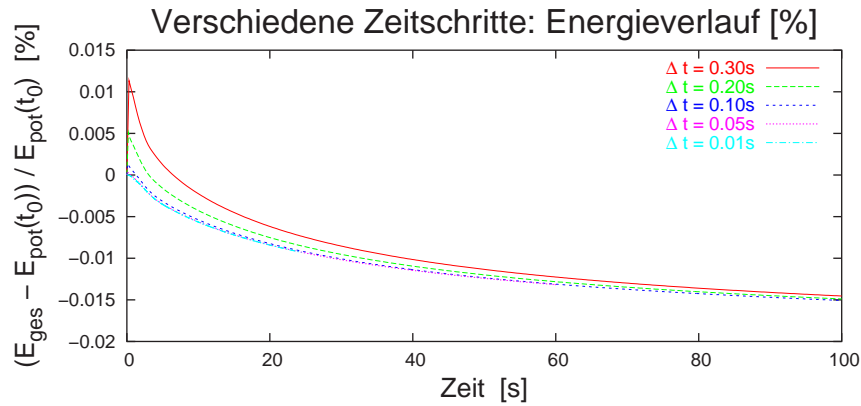


Abbildung 4.8: Prozentuale Abweichung der Gesamtenergie ($E_{kin} + E_{pot}$) von der potenziellen Energie des ruhenden Untergrundes ($E_{pot}(t_0)$) für verschiedene Zeitschrittgrößen ($\Delta t = 0.30$ s, $\Delta t = 0.20$ s, $\Delta t = 0.10$ s, $\Delta t = 0.05$ s, $\Delta t = 0.01$ s) beim Impulsaustauschparameter $\delta = \tilde{\delta} \Delta t$, mit $\tilde{\delta} = 1$ über den Zeitraum von 100 s.

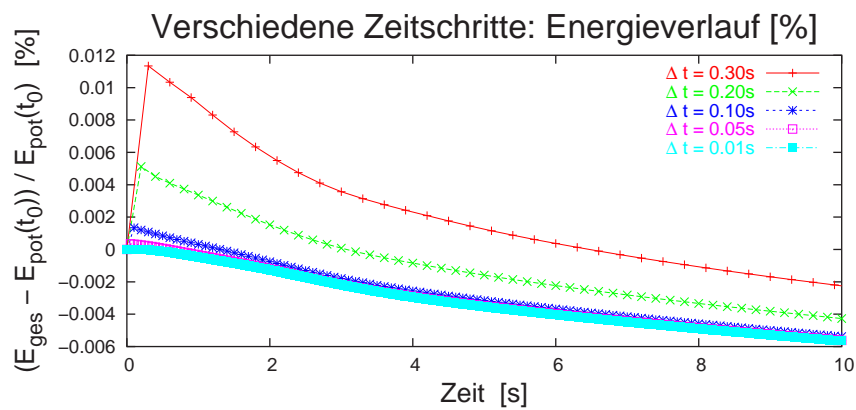


Abbildung 4.9: Vergleich der verschiedenen Energieverläufe bei verschiedenen Zeitschrittgrößen ($\Delta t = 0.30$ s, $\Delta t = 0.20$ s, $\Delta t = 0.10$ s, $\Delta t = 0.05$ s, $\Delta t = 0.01$ s) beim Impulsaustauschparameter $\delta = \tilde{\delta} \Delta t$, mit $\tilde{\delta} = 1$ in den ersten 10 s, dargestellt als prozentuale Abweichung der Gesamtenergie ($E_{kin} + E_{pot}$) von der potenziellen Energie des ruhenden Untergrundes ($E_{pot}(t_0)$).

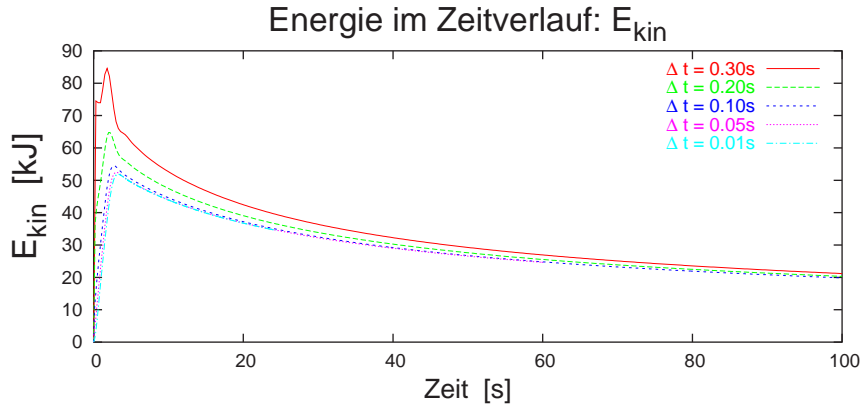


Abbildung 4.10: Vergleich der verschiedenen Energieverläufe der kinetischen Energie bei verschiedenen Zeitschrittgrößen ($\Delta t = 0.30$ s, $\Delta t = 0.20$ s, $\Delta t = 0.10$ s, $\Delta t = 0.05$ s, $\Delta t = 0.01$ s) beim Impulsaustauschparameter $\delta = \tilde{\delta} \Delta t$, mit $\tilde{\delta} = 1$ für die ersten 100 s.

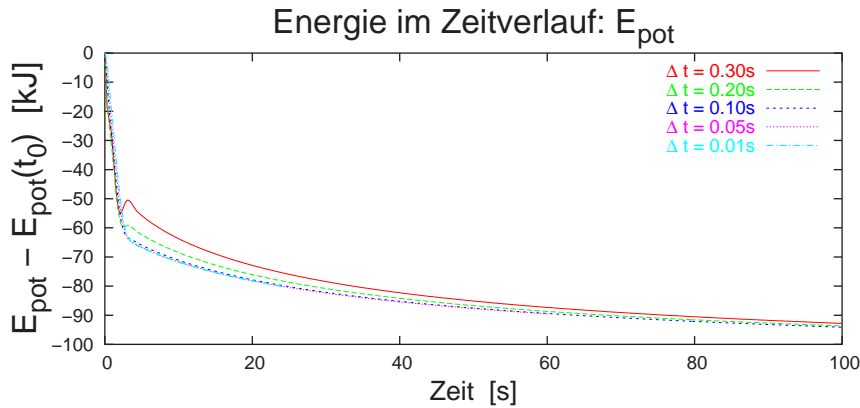


Abbildung 4.11: Vergleich der verschiedenen Energieverläufe der potentiellen Energie bei verschiedenen Zeitschrittgrößen ($\Delta t = 0.30$ s, $\Delta t = 0.20$ s, $\Delta t = 0.10$ s, $\Delta t = 0.05$ s, $\Delta t = 0.01$ s) beim Impulsaustauschparameter $\delta = \tilde{\delta} \Delta t$, mit $\tilde{\delta} = 1$ in den ersten 100 s.

großen Zeitschritten ($\Delta t = 0.30$ s und $\Delta t = 0.20$ s) die Energie zuerst zunimmt, um sich dann erst dem allgemeinen Verlauf anzunähern. Dieser sprunghafte Anstieg lässt darauf schließen, dass es sich hierbei um ein Artefakt handelt.

Um die Anteile der kinetischen und der potentiellen Energie vergleichen zu können, sind diese in den Abb. 4.10 und 4.11 gezeigt. Der Verlauf der potentiellen Energie gibt für alle Zeitschrittgrößen eine Abnahme wieder, die innerhalb der ersten 10 s hauptsächlich aus dem Zerfließen des initialisierten Hügels resultiert (siehe Abb. 4.12). Dabei bemerkt man deutlich den starken Abfall für die größeren Zeitschritte ($\Delta t = 0.30$ s und $\Delta t = 0.20$ s). Speziell für den Fall $\Delta t = 0.30$ s ist gut zu sehen, wie die Kurve um den monotonen Verlauf der Fälle mit kleinerem Δt „schwingt“. Dieses auffällige Verhalten ist ein Hinweis dafür, dass Zeitschritte $> \Delta t = 0.10$ s zu instabilen Berechnungen führen können. Darum wurde in im Folgenden $\Delta t = 0.10$ s als bester Kompromiss aus numerischer Stabilität und benötigtem Rechenaufwand gewählt. Diese monotone Abnahme resultiert aus der dem Verlust der kinetischen Energie, welche durch die Modifizierung mit dem Impulsaus-

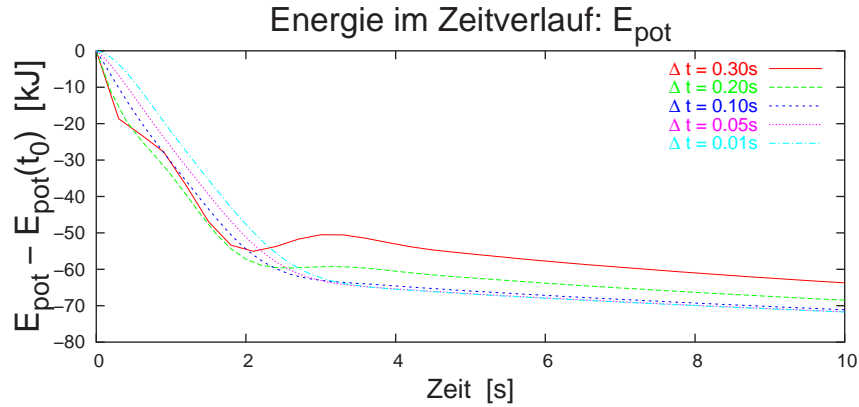


Abbildung 4.12: Vergleich der verschiedenen Energieverläufe der potentiellen Energie bei verschiedenen Zeitschrittgrößen ($\Delta t = 0.30$ s, $\Delta t = 0.20$ s, $\Delta t = 0.10$ s, $\Delta t = 0.05$ s, $\Delta t = 0.01$ s) beim Impulsaustauschparameter $\delta = \tilde{\delta} \Delta t$, mit $\tilde{\delta} = 1$ in den ersten 10 s.

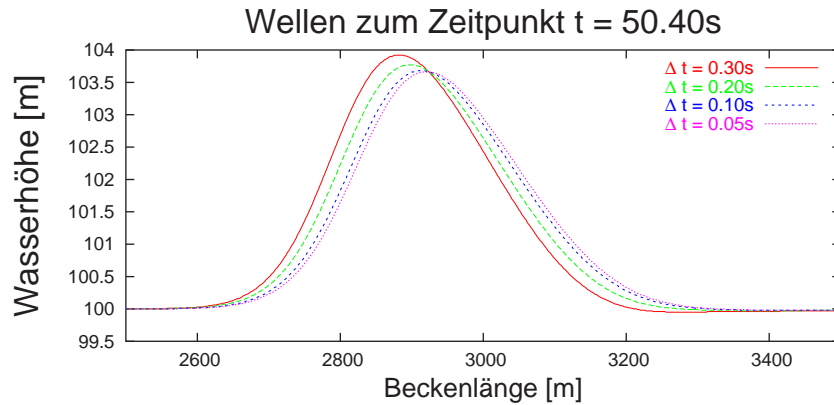


Abbildung 4.13: Eine sich nach links ausbreitende Welle ist bei verschiedenen Zeitschrittgrößen ($\Delta t = 0.30$ s, $\Delta t = 0.20$ s, $\Delta t = 0.10$ s, $\Delta t = 0.05$ s) mit dem Impulsaustauschparameter $\delta = \tilde{\delta} \Delta t$, mit $\tilde{\delta} = 1$ zum Zeitpunkt $t = 50.40$ s dargestellt.

tauschparameter δ kontinuierlich, besonders in der Variable $\dot{\lambda}_i$ (Änderung der Größe der Teilchen) abnimmt.

Konsistenz im Zeitschritt Zur Untermauerung der Zeitschrittwahl (und des Algorithmus im Allgemeinen) beweist man die Konvergenz in der Tendenz eines simulierten Verhaltens, indem man zeigt, dass durch eine Verkleinerung der verwendeten Zeitschrittgröße sich keine Änderungen in den Resultaten erzielen lassen (Konsistenz). In Abb. 4.13 wurde dazu eine sich nach links ausbreitende Welle zum Zeitpunkt $t = 50.40$ s dargestellt. Dieser Zeitpunkt stellt sicher, dass die Energieverluste in allen Systemen in etwa gleich sind (vgl. Energieverlauf Abb.4.8), und somit die Signalhöhen, die ja abhängig vom Energiegehalt der darunterliegenden Wassersäule sind, vergleichbar groß sind, um darüber Aussagen zu treffen. Geplottet ist der Verlauf für die Zeitschrittgrößen $\Delta t = 0.30$ s, $\Delta t = 0.20$ s, $\Delta t = 0.10$ s und $\Delta t = 0.05$ s. Man erkennt, dass die Amplitude der Welle bei abnehmender Zeitschrittgröße Δt gegen den Wert 103.5 m konvergiert. In den folgenden

Tabelle 4.1: Vergleich der experimentell ermittelten Phasengeschwindigkeiten für verschiedene Zeitschrittgrößen ($\Delta t = 0.30$ s, $\Delta t = 0.20$ s, $\Delta t = 0.10$ s und $\Delta t = 0.05$ s) im Versuchsaufbau „Zerfließen“ mit prozentualer Abweichung vom theoretischen Wert bei einer Wasserhöhe von $H = 100$ m.

Δt [s]	c_{exp} [m/s]	c_{theo} [m/s]	Abweichung [%]	$c_{theo,korr}$ [m/s]	Abweichung [%]
0.30	33.35 ± 0.05	31.32	6.40	31.78	4.90
0.20	32.60 ± 0.05	31.32	4.10	31.78	2.58
0.10	31.90 ± 0.05	31.32	1.90	31.78	0.37
0.05	32.59 ± 0.05	31.32	4.00	31.78	2.54

Simulationen wurde deshalb eine Zeitschrittgröße von $\Delta t = 0.10$ s verwendet, eine Wahl, die auch den Parameter $\tilde{\delta}$ wieder direkt in den Impulsaustauschparameter δ überführen lässt (vgl. Gl. 4.2).

Konsistenz der Phasengeschwindigkeit Ebenfalls lässt sich die Konvergenz der Tendenz des Zeitschrittes in der Phasengeschwindigkeit zeigen. Für den Zeitraum von 20 s wurde die Phasengeschwindigkeit bei allen vier Zeitschrittgrößen bestimmt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.1 dargestellt³.

Sie zeigen, dass der experimentell ermittelte Wert c_{exp} im Rahmen der theoretisch berechneten Phasengeschwindigkeit c_{theo} liegt, führt jedoch zu noch besseren Resultaten, wenn man zusätzlich berücksichtigt, dass die darunterliegende Wassersäule eigentlich eine mittlere Höhe von 103 m hat⁴. Diese Abweichung würde bei Einhaltung der Flachwasserbedingungen (Relation $\frac{L_c}{H} \rightarrow 0$) nicht ins Gewicht fallen, führt jedoch in dieser Simulation zu einer deutlich höheren Phasengeschwindigkeit $c_{theo} = 31.78$ m/s und damit zu Abweichungen von c_{exp} zwischen 4.9% und 0.37%. Dies resultiert aus der Linearisierung der Flachwassergleichung zur Herleitung der Phasengeschwindigkeit⁵.

Da jedoch in den folgenden Versuchen eine Zeitschrittgröße von $\Delta t = 0.10$ s gewählt wird, wird auch weiterhin der von der Theorie gerechtfertigte Wert $c_{theo} = 31.32$ m/s für die Diskussion verwendet. Die Ungenauigkeit bezüglich des experimentellen Wertes (± 0.05 m/s) ergibt sich aus der x -Auflösung der Höhenberechnungsroutine.

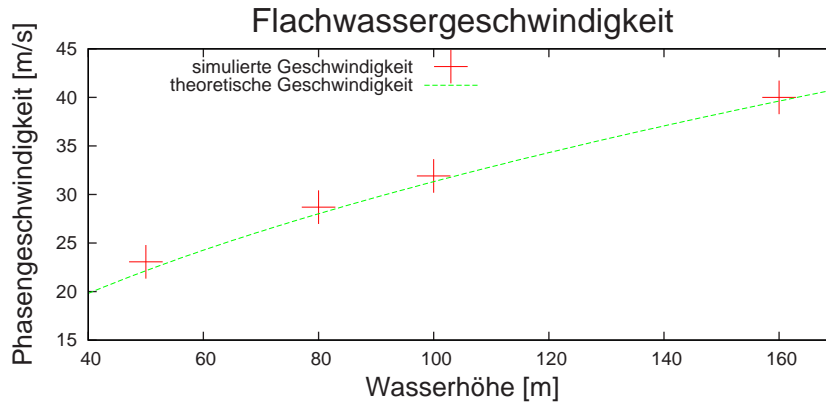


Abbildung 4.14: Vergleich der simulierten Phasengeschwindigkeit mit der theoretisch berechneten

4.2.1.4 Vergleich verschiedener Anfangsbedingungen und deren Auswirkung auf die Phasengeschwindigkeit

Die Phasengeschwindigkeit einer sich ausbreitenden Flachwasserwelle ist nur durch die Höhe der darunterliegenden Wassersäule bestimmt (s. Gl. 3.8). Aus diesem Grund wurden Simulationen des „Zerfließens“ mit unterschiedlichen Werten für die Höhe der Wasseroberfläche H durchgeführt.

In Abbildung 4.14 sind die Phasengeschwindigkeiten der sich ausbreitenden Wellen bei vier verschiedenen Ausgangskonstellationen aufgetragen: bei den einzelnen Simulationen wurde lediglich die Initialisierungsdichte der Massepäckchen erhöht bzw. verringert, so dass insgesamt die Zahl der Massepäckchen zu- bzw. abgenommen hat. So wurde der Wasserspiegel im ersten Versuch auf $H = 50$ m gesetzt, mit insgesamt $N = 1250$ Massepartikeln. In den weiteren Versuchen wurde die Höhe auf $H = 80$ m und $H = 160$ m erhöht mit $N = 2000$ bzw. $N = 4000$ Teilchen. Ferner wurde natürlich der bereits oben erwähnte Fall der Standard-Konfiguration für diese Dissertation mit $H = 100$ m betrachtet. Auch in diesen Simulationen wurde der Impulsaustauschparameter $\delta = 0.10$ gesetzt⁶.

In Tabelle 4.2 sind für die verschiedenen Simulationen die jeweils resultierende Phasengeschwindigkeit c_{exp} und deren theoretisch nach Gleichung (3.8) ermittelter Wert aufgetragen. Man erkennt, dass alle Werte aus den Simulationen zwar über den theoretischen liegen, dennoch betragen die prozentualen Abweichungen unter 3% des theoretischen Wertes.

4.2.2 Sinusförmige Oberfläche

Wie schon in Kapitel 3.3.4 angesprochen, stellt sich die Frage, wie die erforderlichen Anfangsbedingungen optimal repräsentiert werden können. Dort wurde die Methode des

³wobei die prozentuale Abweichung nach der Formel $|\frac{c_{exp}-c_{theo}}{c_{theo}}|$ berechnet wurde.

⁴Diesen Wert erhält man, wenn man davon ausgeht, dass die Massenpäckchen eine einheitlich glatte Oberfläche bilden.

⁵Siehe z.B. Ettlting (1996).

⁶was einem modifizierten Impulsaustauschparameter von $\tilde{\delta} = 1.00$ entspricht.

Tabelle 4.2: Vergleich der theoretischen und experimentell ermittelten Phasengeschwindigkeiten für verschiedene Höhen H im Versuchsaufbau mit prozentualer Abweichung vom theoretischen Wert.

Wasserhöhe H [m]	c_{exp} [m/s]	c_{theo} [m/s]	Prozentuale Abweichung
50.00	23.07 ± 0.05	22.50	2.53
80.00	28.70 ± 0.05	28.01	2.46
100.00	31.91 ± 0.05	31.32	1.90
160.00	40.00 ± 0.05	39.61	0.98

Steilsten Gradienten (s. auch Anhang C) vorgestellt, die im Folgenden verwendet wird, um eine sinusförmige Oberfläche zu initialisieren. Der Vorteil einer sinusförmigen Oberfläche besteht darin, dass die bekannten analytischen Lösungen allesamt auf einem sinusförmigen Wellenansatz beruhen. Insofern eröffnen sich Vergleichsmöglichkeiten bei einer solchen Ausgangskonfiguration, die bei den bisherigen Versuchen nicht möglich waren. Ferner kann man diese Initialisierung als eine mögliche Abwandlung des „Test Case“ (Williamson et al., 1992) der Advektion einer Gaussglocke betrachten. Ziel ist es, eine formstabile Bewegung zu realisieren.

Es werden hierbei Wellen vorgegeben, die sich mit einer Wellenlänge von $L_c = 1000$ m und einer Amplitude von $h_s = 10$ m in x -Richtung ausbreiten, also eine Wasseroberfläche $h(x, t)$ vorgegeben, die gemäß

$$h(x, t) = h_s \sin\left[\frac{2\pi}{L_c}(x - ct)\right] + h_0 \quad (4.4)$$

bestimmt wurde, wobei c die Phasengeschwindigkeit und h_0 die das Nullniveau der Wasseroberfläche darstellt.

In Abb. 4.15 sieht man den Ausschnitt zwischen 2000 m und 7000 m des $L = 10.000$ m langen Beckens zu den Zeitpunkten $t = 0.00$ s und $t = 15.30$ s dargestellt bei einer Ausgangsgeschwindigkeit von $v_0 = 0$ m/s für alle Teilchen. Man erkennt, dass die mittels der Methode des Steilsten Gradienten initialisierte Wasseroberfläche ihre Form bei $t = 15.30$ s (phasenverschoben) wiedererlangt hat. Die Grafik gibt nicht wieder, dass in den Zeitschritten dazwischen die Oberfläche nicht-sinusförmig wird. Dies liegt daran, dass eine einheitliche Strömungsgeschwindigkeit für alle Teilchen initialisiert wurde. Aus diesem Grund wurde versucht, die Ausbreitung unter Zuhilfenahme einer an die Oberfläche angepasste Anfangsgeschwindigkeit der Teilchen zu simulieren

Mit Hilfe des Antriebs der Flachwassergleichung (vgl. Gl.3.12),

$$-g \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{2\pi g h_s}{L_c} \cos\left[\frac{2\pi}{L_c}(x - ct)\right] \quad (4.5)$$

und der Flachwassergleichung selbst ($\frac{du}{dt} = -g \frac{\partial h}{\partial x}$) wurde die Anfangsgeschwindigkeit ermittelt:

$$u(x, t) = \frac{g h_s}{c} \sin\left[\frac{2\pi}{L_c}(x - ct)\right] + u_0. \quad (4.6)$$

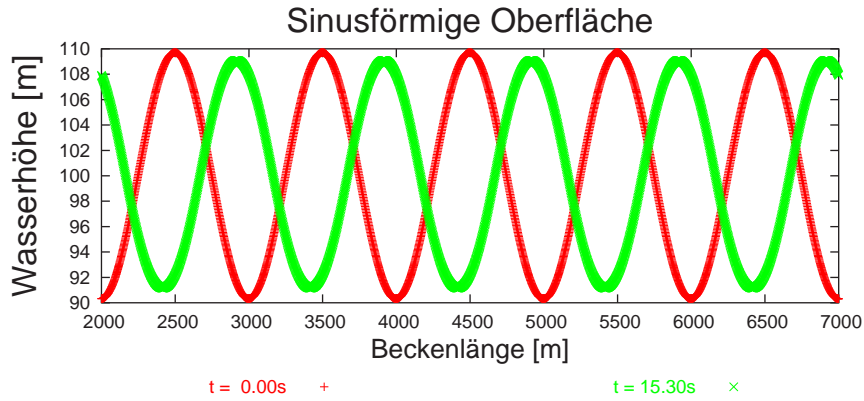


Abbildung 4.15: Sinusförmige Oberfläche: $v_0 = 0$ m/s: geplottet ist ein Ausschnitt des $L = 10.000$ m langen Beckens zu den Zeitpunkten $t = 0.00$ s und $t = 15.30$ s (mit $\tilde{\delta} = 1$.)

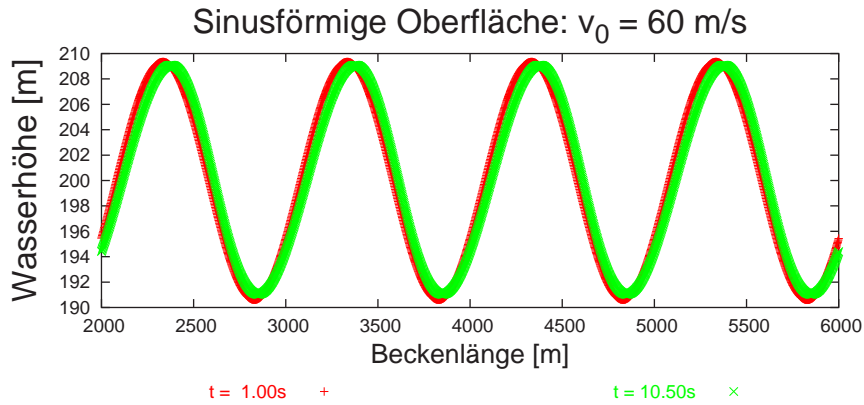


Abbildung 4.16: Sinusförmige Oberfläche: $v_0 = 60$ m/s: geplottet ist ein Ausschnitt des $L = 10.000$ m langen Beckens zu den Zeitpunkten $t = 1.00$ s und $t = 10.50$ s (mit $\tilde{\delta} = 1$.)

Dabei steht u_0 für die Ausgangsgeschwindigkeit und g – wie in den oberen Gleichungen – für die Erdbeschleunigung.

In Abb. 4.16 ist dieses Experiment nach einer Initialisierung unter Zuhilfenahme des Iterationsverfahrens dargestellt. Als Ausgangsgeschwindigkeit wurde für die Teilchen das Geschwindigkeitsfeld:

$$u(x, t) = \frac{g \, 10.0 \, \text{m}}{104.29 \, \text{m/s}} \sin\left[\frac{2\pi}{1000 \, \text{m}}(x - 104.29 \, \text{m/s } t)\right] + 60 \, \text{m/s}. \quad (4.7)$$

vorgegeben. In Abb. 4.16 Ist dieses Verhalten für eine vorgegebene Wasseroberfläche der Höhe $H = 200$ m wiedergegeben. Die theoretische Phasengeschwindigkeit für dieses Experiment beträgt $c = v_0 + \sqrt{gH} = 104.29$ m/s. Als Phasengeschwindigkeit erhält man im Experiment $c = 108.7$ m/s, was einer prozentualen Abweichung von 4.2% entspricht. Mit Hilfe des vorgegebenen Geschwindigkeitsfeldes konnte die sinusförmige Oberflächenstruktur über alle Zeitschritte beibehalten werden.

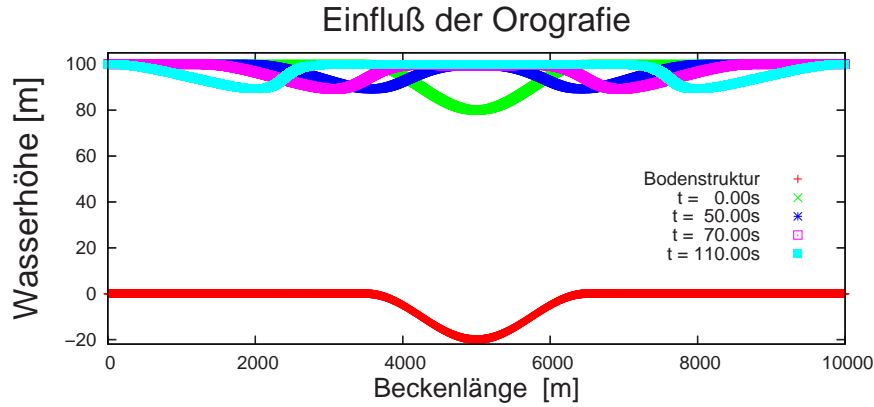


Abbildung 4.17: Bei Initialisierung ruhendes Gewässer unter Einwirkung der Orografie. Dargestellt ist der zeitliche Verlauf des Wassers bei $t = 0.00$ s, $t = 50.00$ s, $t = 70.00$ s, $t = 110.00$ s und die Bodenstruktur, eine Senke der Tiefe -20 m mit einem Durchmesser von $d = 3000$ m. Impulsaustauschparameter $\delta = 0.025$

4.2.3 Orografie

In der Meteorologie betrachtet man üblicherweise Strömungen, die von einer Orografie beeinflusst werden. Aus diesem Grunde wurden einige Simulationen mit einer Bodenstruktur durchgeführt. Dafür wurden die an einer Orografie angepassten Gleichungen für q_i und λ_i (Gln. 3.47 und 3.50) verwendet. Im ersten Teilabschnitt wird das Überströmen einer Bodensenke diskutiert und im zweiten das sub- und superkritische Fließen betrachtet. Alle Versuche mit Orografie haben eine geländefolgende Initialisierung der Wasseroberfläche.

4.2.3.1 Bodensenke

Für diese Simulation wurde eine Orografie gewählt, die bereits im Vergleichsmodell von MPDATA (siehe Kap. 3.4) implementiert war. Dabei handelt es sich um eine Bodensenke mit dem Durchmesser von $d = 3000$ m und einer Tiefe von -20 m. Die Ausgangssituation stellt eine geländefolgende Wasseroberfläche dar.

In Abb. 4.17 ist der zeitliche Verlauf für die Zeitpunkte $t = 0.00$ s, $t = 50.00$ s, $t = 70.00$ s und $t = 110.00$ s geplottet. Man erkennt deutlich, wie sich im Laufe der Zeit die anfangs geländefolgende Wasseroberfläche über der Bodensenke nach oben hebt und nach rechts und links eine Welle ausbildet. In den Abbildungen 4.18 und 4.19 sind die Werte für das MPDATA-Modell und die FMM-Methode geplottet. Dargestellt sind die Zeitpunkte $t = 20.0$ s, $t = 40.0$ s und $t = 100.0$ s. Zum besseren Vergleich der beiden Modelle sind in Abb. 4.19 die Wasseroberflächen für jeden Zeitschritt einzeln direkt gegenübergestellt. Man erkennt eine fast vollständige Übereinstimmung bei $t = 20.0$ s. Bei $t = 40.0$ s ist die von MPDATA dargestellte Kurve etwas flacher, als die von der FMM berechnete. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit für beide Simulationen ist jedoch gleich für beide Zeitpunkte. Dies ändert sich im Laufe der Zeit, denn bei $t = 100.0$ s erkennt man, dass die Gradienten für die FMM steiler sind und die Ausbreitung langsamer erfolgt, als bei MPDATA. Dies kann auch darauf zurückgeführt werden, dass bei MPDATA ein Asselin-Filter zur Glättung über die Daten gelegt wurde.

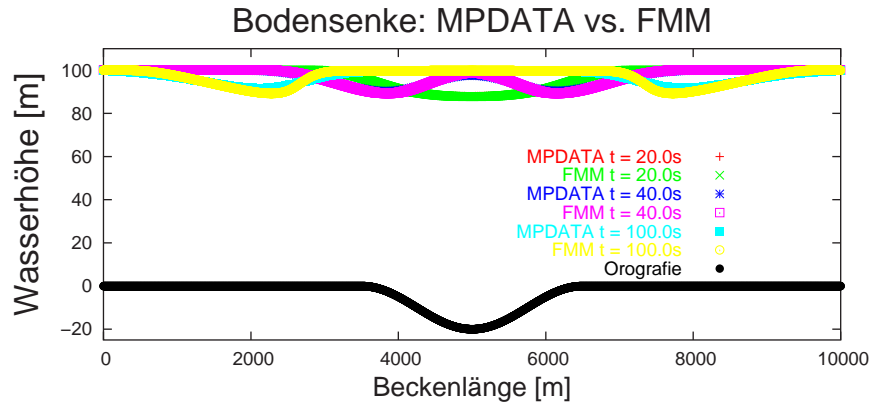


Abbildung 4.18: Bodensenke im Überblick: MPDATA und FMM unterscheiden sich in dieser Darstellung nicht wesentlich. Geplottet sind die Zeitpunkte $t = 20.0$ s, $t = 40.0$ s und $t = 100.0$ s beider Verfahren und die zugrundeliegende Orografie.

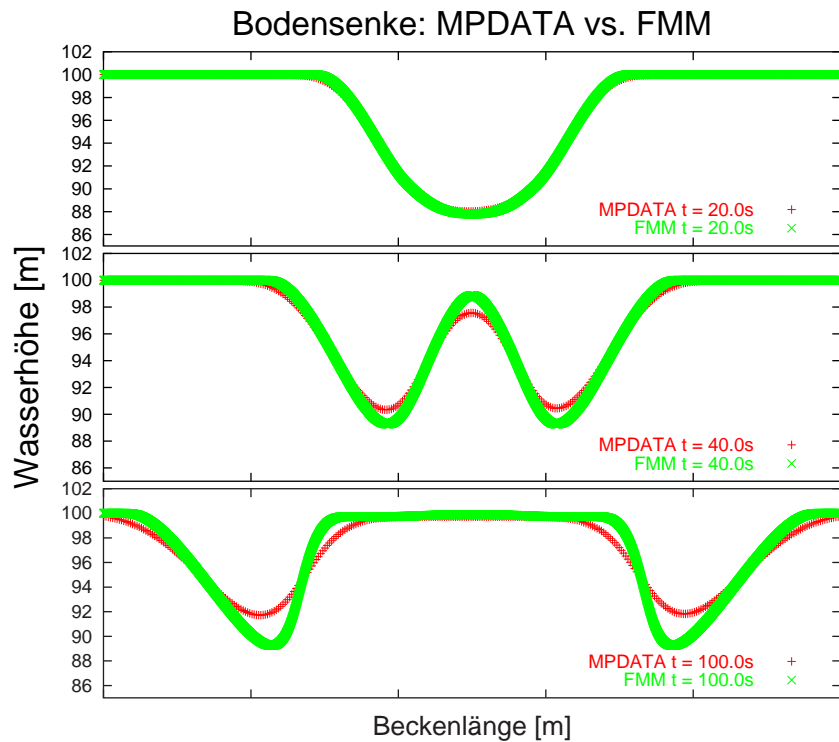


Abbildung 4.19: Bodensenke: MPDATA vs. FMM: Geplottet sind die Zeitpunkte $t = 20.0$ s, $t = 40.0$ s und $t = 100.0$ s, jeweils zum direkten Vergleich der beiden Verfahren.

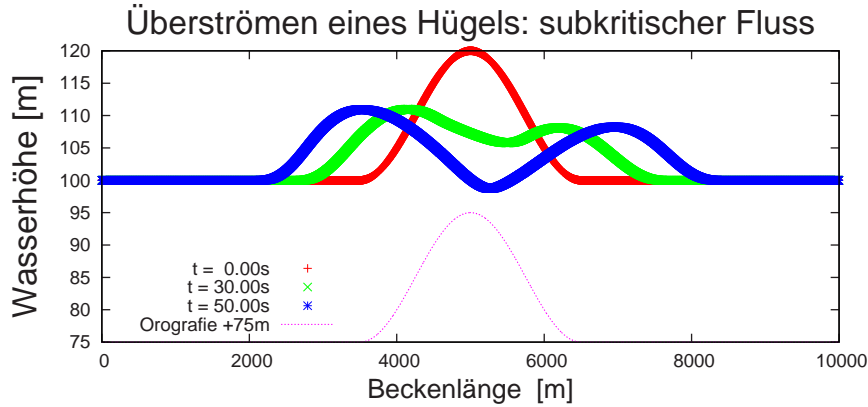


Abbildung 4.20: Subkritischer Fluß: ein mit $v_0 = 5$ m/s fließendes Gewässer überströmt einen Hügel der Breite $d = 3000$ m und der Höhe $h_B = 20$ m. Dargestellt sind die Zeitpunkte $t = 0.00$ s, $t = 30.00$ s, $t = 50.00$ s bei einem Impulsaustauschparameter von $\delta = 0.025$. Die Orografie, die bis auf den Hügel auf Nullniveau ($h_b = 0$ m) liegt, wurde in diesem Plot aus Anschauungsgründen um 75 m nach oben verschoben.

4.2.3.2 Überströmen eines Hügels / einer Bodenerhebung

Wie bereits in Kapitel 3.1.2 diskutiert, gibt es beim Überströmen von Hindernissen verschiedene Arten des Fließens, die sich in der Froudezahl (s. Gl. 3.9) widerspiegeln. Je nach Anströmgeschwindigkeit u und damit Froudezahl Fr wurden, teilweise mit unterschiedlichen Bodenstrukturen, die aus der Strömungsmechanik bekannten Fließeigenschaften in der Simulation reproduziert. Zu Beachten ist hierbei, dass die Wasseroberfläche hier ebenfalls geländefolgend initialisiert wurde, so dass eine sich nach rechts und links ausbreitende Welle durch die Anfangsbedingungen gegeben ist. Ferner, um in diesen Simulationen möglichst wenig der kinetischen Eigenschaften des Systems einzubüßen, wurde der Impulsaustauschparameter hier auf $\delta = 0.025$ gesetzt. Die Wahl solch eines relativ kleinen Impulsaustauschparameters ist dadurch gerechtfertigt, dass – im Gegensatz zu den früheren Experimenten – in diesem Versuch eine Anfangsgeschwindigkeit des Wassers (und somit auch der Massepäckchen) $v \neq 0$ vorgegeben ist. Die gesamte Wassersäule ist also von Beginn der Simulation an in Bewegung, was, gekoppelt mit den Randbedingungen, dazu führt, dass die Impulsdifferenz zwischen den einzelnen Päckchen einer Säule nicht so groß ist, wie es bei den vorher beschriebenen Experimenten der Fall war.

Subkritischer Fluß Im ersten Versuch wurde ein subkritischer Fluß simuliert. In diesem Fall ist die Geschwindigkeit des fließenden Gewässers mit $v_0 = 5$ m/s deutlich unter der Phasengeschwindigkeit des Flachwassers ($c = 31.32$ m/s) initialisiert worden und damit handelt es sich nach Gl. 3.9 um den Fall $Fr < 1$, welcher als subkritisch bezeichnet wird. Dargestellt in Abb. 4.20 sind die Zeitpunkte $t = 0.00$ s, $t = 30.00$ s und $t = 50.00$ s, bei denen das Wasser einen $d = 3000$ m breiten und $h_B = 20$ m hohen Hügel überströmt. Die Bodenorografie wurde hierbei aufgrund der besseren Anschauung um den Wert 75 m erhöht eingezeichnet. Man erkennt deutlich, dass, wie beim Experiment „Zerfließen“ (s. Abschnitt 4.2.1), sich jeweils eine Welle nach links und nach rechts ausbildet, wie es von der Hydrodynamik auch gefordert wird: beim subkritischen Fließen können Signale sowohl

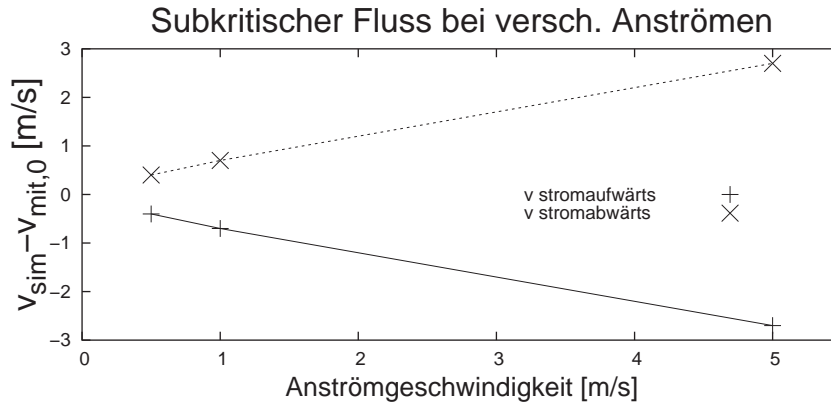


Abbildung 4.21: Subkritischer Fluß bei verschiedenen Anströmgeschwindigkeiten: $v_0 = 0.5$ m/s, $v_0 = 1.0$ m/s und $v_0 = 5$ m/s. Geplottet sind die Geschwindigkeiten stromauf- und stromabwärts, referenziert auf das Geschwindigkeitsmittel (s. Text)

stromabwärts als auch stromaufwärts propagieren. In Abb. 4.21 sind die Geschwindigkeiten der sich stromauf- und stromabwärts ausbreitenden Wellen bei den Simulationen mit den Anfangsgeschwindigkeiten $v_0 = 0.5$ m/s, $v_0 = 1.0$ m/s und $v_0 = 5$ m/s, bezogen auf die Anströmgeschwindigkeit ($c_{mit,0}$) dargestellt. Diese ist der Mittelwert der Beträge der beiden Ausbreitungsgeschwindigkeiten:

$$c_{mit,0} = \frac{(|v_{stromauf}| + v_{stromab})}{2} \quad (4.8)$$

Nach Gl. 3.8 bilden sich für beide Strömungsrichtungen Geraden aus, für unterschiedliche Anströmgeschwindigkeiten. Diese sind in diesem Experiment sehr schön zu erkennen.

Superkritischer Fluß In der nächsten Simulation wurde ein superkritischer Fluß mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 60$ m/s initialisiert. Da die Strömungsgeschwindigkeit somit deutlich höher als die Flachwassergeschwindigkeit ($c = 31.32$ m/s) ist, erhält man eine Froudezahl größer als 1. In Abb. 4.22 ist dieser Versuch dargestellt, wobei die Orografie mit einem Offset von 40 m geplottet wurde. Der Verlauf der Wasseroberfläche für die Zeitpunkte $t = 0.00$ s (in rot), $t = 30.00$ s, $t = 40.00$ s, $t = 50.00$ s und $t = 60.00$ s abgebildet. Da auch in dieser Simulation geländefolgend initialisiert wurde, handelt es sich hier ebenfalls um einen Versuchsaufbau vom Typ „Zerfließen“ (vgl. 4.2.1), jedoch zeigt sich deutlich das typische Verhalten einer superkritischen Strömung: ein Signal kann sich nur stromabwärts ausbreiten. Aus diesem Grund erhält man keine Welle nach links, sondern die Neigung des Wasserhügels verschiebt sich nach links.

Hydraulischer Sprung In diesem Versuch (s. Abb. 4.23) mit einer Hügelhöhe von $h_b = 80$ m und der Breite $d_{h_b} = 3000$ m wurden alle Masseteilchen mit derselben Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 20$ m/s initialisiert. Diese Geschwindigkeit bewirkt im Zusammenspiel mit der recht hohen Bodenoroografie, dass sich hinter dem Hindernis ein hydraulischer Sprung ergibt. Das Anströmen erfolgt noch im subkritischen Fließen, hier ist die Geschwindigkeit noch deutlich unter der Flachwassergeschwindigkeit $c = 31.32$ m/s,

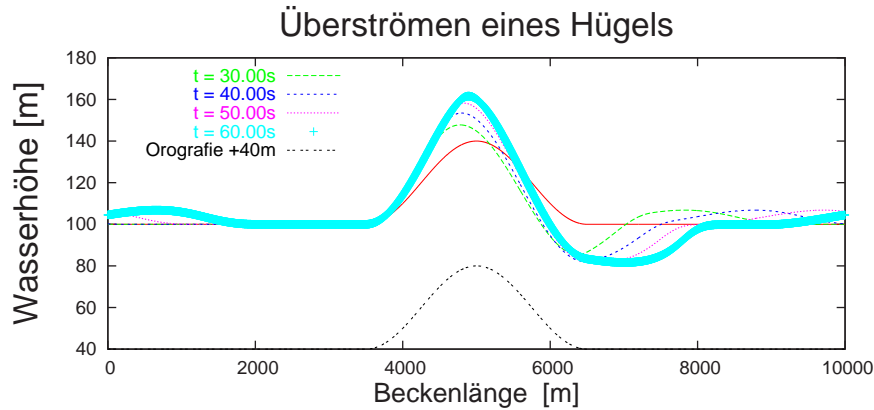


Abbildung 4.22: Superkritischer Fluß: ein mit $v_0 = 60$ m/s fließendes Gewässer überströmt einen Hügel der Breite $d = 3000$ m und der Höhe $h_B = 40$ m. Dargestellt sind die Zeitpunkte $t = 0.00$ s (in rot), $t = 30.00$ s, $t = 40.00$ s, $t = 50.00$ s und $t = 60.00$ s bei einem Impulsaustauschparameter von $\delta = 0.025$. Zur besseren Darstellung wurde die Orografie mit einem Offset von 40 m geplottet.

was eine Froudezahl $Fr < 1$ ergibt. Die Geschwindigkeit im Lee des Hügels nimmt zu, es ergeben sich Geschwindigkeiten um die $v = 40$ m/s, d.h. es handelt sich hierbei um einen superkritischen Fluss. Mit Hilfe des hydraulischen Sprunges geht das Wasser wieder in den subkritischen Stömungszustand über ($Fr < 1$). Durch das subkritische Fließen ist eine Wellenausbreitung des zerfließenden Wasserhügels sowohl stromauf– als auch stromabwärts möglich und man erkennt in Abb. 4.23 die sich nach links ausbreitende, stromaufwärts propagierende Welle.

In der Grafik 4.24 ist die Geschwindigkeit im Wasserbecken zum Zeitpunkt $t = 55.00$ s dargestellt. Ebenso sind aus anschaulichen Gründen die Bodenstruktur [m] und die Wasserhöhe [m], letztere mit einem Offset von -80 m eingezeichnet. Vor dem Hindernis ist die Geschwindigkeit konstant, verringert sich jedoch beim Anströmen des Hindernisses, bis sie im Lee des Hügels sogar verdoppelt und diese durch den Hydraulischen Sprung schlagartig wieder in Richtung der Anströmgeschwindigkeit anpasst. Der Anstieg in der Geschwindigkeit jenseits des Ortes des Hydraulischen Sprunges basiert auf der sich ausbreitenden Welle, die sich durch das Zerfließen nach der geländefolgenden Initialisierung ausbildet.

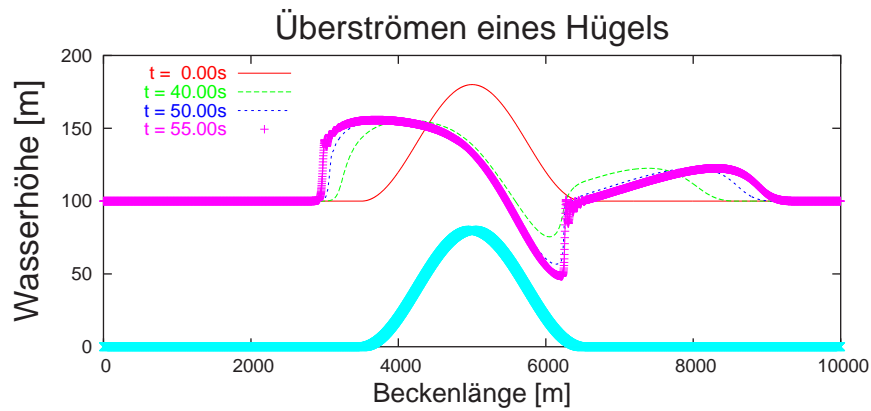


Abbildung 4.23: Hydraulischer Sprung: Anfangsgeschwindigkeit der Teilchen $v = 20$ m/s über eine Bodenerhebung, ein Hügel der Höhe $h_b = 80$ m und mit einem Durchmesser von $d_{hb} = 3000$ m. Dargestellt ist die Situation zu den Zeitpunkten $t = 0.00$ s, $t = 40.00$ s, $t = 50.00$ s und $t = 55.00$ s, ebenso die zugrundeliegende Orografie. Der Impulsaustauschparameter wurde auf $\delta = 0.025$ gesetzt.

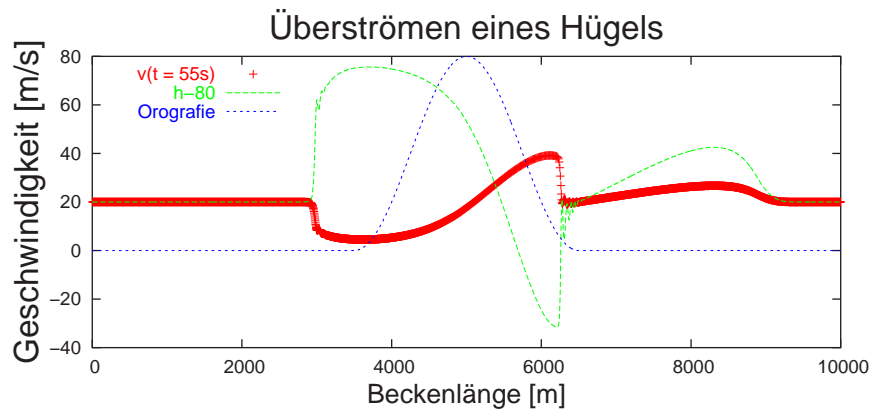


Abbildung 4.24: Geschwindigkeitsverlauf beim Hydraulischen Sprung; dargestellt ist die Geschwindigkeit des Gewässers im Wasserbecken zum Zeitpunkt $t = 55.00$ s. Aus anschaulichen Gründen wurden ebenfalls die Bodenorografie [m] und die Wasserhöhe [m], letztere mit einem Offset von -80 m eingezeichnet.

Kapitel 5

Bewertung der Methodik

5.1 Adaption und Implementierung

Zur Implementierung des FMM-Modells waren verschiedene Herleitungen notwendig. Die Umsetzung des neuen Konzeptes betraf nicht nur die Transformation der Höhe und die Aufstellung der Bewegungsgleichungen für die prognostischen Variablen \dot{q}_i und $\dot{\lambda}_i$, sondern auch für die Realisierung der Randbedingungen. Das Verständnis der einzelnen Modellparameter und deren Wirkung war ein wichtiger Punkt in der Vorbereitungsphase der Implementierung.

Die Anpassung der Bewegungsgleichungen an die Orografie stellte im Anschluss daran sowohl mathematisch als auch programmiertechnisch keine Schwierigkeit mehr dar.

Im Vergleich zu Eulerschen oder Semi-Lagrangeschen Methoden weist die momentane Implementierung des FMM-Modells sowohl eine deutlich längere Rechenzeit als auch einen größeren Speicherbedarf auf, da noch keine spezielle Optimierung auf den Code angewendet wurde. Im Vergleich zum verwendeten MPDATA-Modell lag der Rechenzeitbedarf um den Faktor 5 höher. Diese Eigenschaft liegt sicherlich in der gewählten Initialisierungsdichte der Päckchen ($\Delta x_{ini} = 4$ m) und in der Form der Implementierung der Routine zur Berechnung der Beschleunigungen, welche bei geschickter Umsetzung von der Ordnung $\mathcal{O}(N^2)$ auf die Ordnung $\mathcal{O}(2N)$ reduzierbar ist.

5.2 Diskussion

Generell lässt sich sagen, dass sich mit der FMM-Methode eine Reihe von Experimenten gut simulieren ließen. In Kapitel 4 wurden hierzu verschiedene Versuche vorgestellt. Dabei hat sich gezeigt, dass das FMM-Modell in der Lage ist, die wesentlichen qualitativen Eigenschaften des Flachwassersystems zu reproduzieren.

Die der FMM innewohnende Eigenschaft der Masseerhaltung hat zur Folge, dass Masseverluste nicht auftreten können und somit Massefixer, wie sie in Eulerschen und insbesondere auch Semi-Lagrangeschen Modellen verwendet werden, nicht benötigt werden.

Ferner tritt das Problem der „leeren Boxen“, das aus Gittermodellen mit Lagrangeschen Advektionsschema bekannt ist, mit der FMM nicht auf. Wie schon in Kapitel 3 angesprochen wurde, dehnt sich ein einzelnes Masseteilchen unter dem Einfluss der Schwerkraft

immer weiter aus, so dass auch sehr geringe Stoffkonzentrationen über weite Bereiche mit aufgelöst werden können und damit jedem Gitterpunkt eine Konzentration zugeordnet werden kann. Dieses bekannte Problem ist somit schon durch Verwendung der FMM-Methode gelöst.

In zahlreichen Simulationen hat sich gezeigt, dass die Masseteilchen zu einer einheitlichen Teilchengröße tendieren (hier: $\lambda = 48$ m), die idealerweise schon bereits bei der Initialisierung des Experiments verwendet wird. Somit beschränkt sich der Einfluss von „vergrößerten Teilchen“ auf die Region, in der die Dynamik geschieht. Dort beträgt die Abweichung der Teilchengröße zur Anfangsgröße in den hier durchgeführten Simulationen weniger als 10%. Nach Durchlauf des Signals stellt sich wieder die Anfangsgröße ein.

Im Rahmen der Experimente „Zerfließen“ wurde die Phasengeschwindigkeit der sich ausbreitenden Welle bei verschiedenen Konfigurationen ermittelt. Im Standard-Versuchsaufbau ($H = 100$ m, $\Delta t = 0.10$ s, $\delta = 0.10$) beträgt die Abweichung zum theoretischen Wert weniger als 2.0%.

Mit Hilfe des Impulsaustauschparameters $\tilde{\delta}$ konnte sichergestellt werden, dass die Geschwindigkeit der einzelnen Teilchen sich dem Gesamtfeld annähern und daraus resultierend glattere Wellenberge erzeugt wurden. Damit konnte die Konsistenz im Zeitschritt durch die Konstanz der Amplituden bei verschiedenen Zeitschrittgrößen gezeigt werden. Allerdings wichen die daraus resultierenden Phasengeschwindigkeiten zwischen 0.5% ($\Delta t = 0.05$ s) und 5% ($\Delta t = 0.40$ s) vom theoretischen Wert ab.

Eine allgemeine Aussage, ob es für das FMM-Verfahren ein Analogon zum CFL-Kriterium gibt, konnte nicht getroffen werden. Jedoch besteht die Vermutung, dass das Zusammenspiel der Teilchengröße und des Zeitschritts diese Abweichungen hervorruft. Dies deutet darauf hin, dass eine dem CFL-Kriterium ähnelnde Bedingung den Zeitschritt auf etwa $\Delta t < \frac{c}{2 \cdot (2\lambda)}$ festlegen könnte (mit $2\lambda :=$ Durchmesser der Teilchen). Ein weiterer Faktor in der Limitierung könnte in der Initialisierungsdichte der Teilchen ($\Delta x_{ini} = 4$ m) begründet sein.

Ohne Impulsaustauschparameter konnte die Energieerhaltung gezeigt werden. Bei Sicherstellung des Impulsaustausches mit Hilfe des Impulsaustauschparameters lag die Energieabnahme bei unter 0.006%, so dass der daraus resultierende Fehler in der Energieabnahme als gering einzustufen ist.

In einer weiteren Simulation wurde gezeigt, dass das Modell auch für andere Konfigurationen einsetzbar ist. Hier wurden die resultierenden Phasengeschwindigkeiten bei verschiedenen Ausgangshöhen H verglichen. Dadurch ließ sich die Abweichung vom theoretischen Wert auf unter 1% reduzieren, was allerdings darauf zurückzuführen ist, dass bei Wassersäulen größer $H = 100$ m die Flachwasserbedingung $h_s \ll H$ mit $\frac{h_s}{H} < \frac{1}{20}$ erfüllt wird. Ein möglicher weiterer Faktor der Verkleinerung der Abweichung liegt in der Initialisierungsdichte begründet, die auf $\Delta x_{ini} = 3$ m reduziert wurde, bei gleichzeitiger Erhöhung der Teilchenanzahl, das einer größeren Auflösung des Problems entspricht.

Zur weiteren Überprüfung des Verhaltens des Systems wurden mehrere Strömungsexperimente über eine Orografie durchgeführt. Die Simulationen bei sub- und superkritischem Anströmen zeigen keine qualitativen Unterschiede zum erwarteten Verhalten: im subkritischen Fall erhält man Wellenausbreitung stromab- wie auch stromaufwärts, wohingegen sich im superkritischen Fall das Signal nur stromabwärts ausbreiten kann. Ebenso konnte der Hydraulische Sprung reproduziert werden. Hinter dem Hindernis springt die Geschwin-

digkeit wieder auf den subkritischen Wert.

Im subkritischen Fall wurde für verschiedene Anströmgeschwindigkeiten die Phasengeschwindigkeit in beide Ausbreitungsrichtungen bestimmt. Die Ergebnisse liegen sowohl stromauf- als auch stromabwärts auf einer Geraden und spiegeln damit exakt den linearen Zusammenhang zwischen den verschiedenen Anströmgeschwindigkeiten wieder. Die daraus mittels linearer Regression resultierende Phasengeschwindigkeit für eine Ausbreitung ohne Anströmen liegt um ca. 3% höher als die theoretisch zu erwartende.

Zur Überprüfung der Modellergebnisse des FMM-Modells wurde in der Simulation „Bodensenke“ das MPDATA-Modell herangezogen. Ein Vergleich zwischen beiden Modellen lieferte eine exakte Übereinstimmung in den ersten 10 Modellsekunden und eine gute im weiteren Zeitverlauf. So zeigen die beiden Modelle identische Signalausbreitungsgeschwindigkeiten, jedoch unterschiedliche Gradienten in der berechneten Wasserhöhe. Das FMM-Modell zeigt hier steilere Verläufe als MPDATA, wobei zu beachten ist, dass in MPDATA eine Glättung durchgeführt wird.

Die Simulation „Sinusförmige Oberfläche“ lieferte qualitative Aussagen über die tatsächliche Amplitude der sich ausbreitenden Wasserwellen. Im Experiment ohne Anfangsgeschwindigkeit der Teilchen erhielt man Abweichungen in der Wasserhöhe um die 10% bereits nach 10 s. Ferner betrug die Abweichung der Phasengeschwindigkeit 16%. Aus diesem Grund wurde ein an das Experiment angepasstes Geschwindigkeitsprofil vorgegeben, mit dem Ergebnis, dass die Amplitude nach 10 s ihren Maximalwert noch zu 95% erhielt und die Phasengeschwindigkeit bis auf eine Abweichung von 4.2% vom theoretischen Wert wiedergegeben wurde.

Kapitel 6

Zusammenfassung & Ausblick

Ziel dieser Dissertation war es, die von H. Yserentant entwickelte Methode der Finiten Massen in Hinblick auf eine mögliche Anwendung in einem dynamischen Kern eines Klimamodells zu testen. Diese auf dem Lagrangeschen Ansatz beruhende Methode wurde dazu auf die eindimensionale Flachwassergleichung ohne zusätzliche Kräfte angewendet. Die dabei erforderliche Transformation des Problems auf die durch die Konstanz der Dichte im Flachwassersystem mögliche FMM-Darstellung erwies sich in zahlreichen Detailfragen als mathematisch-physikalische Herausforderung.

Die Adaption der Flachwassergleichung erfolgte über die Lagrangeschen Gleichungen, die die Bewegungsgleichung sowohl für den Schwerpunkt der Teilchen q_i als auch für deren Größe λ_i lieferte. Auf dieselbe Art geschah die Herleitung der Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung einer Bodenstruktur. Als Zeitintegrationsschema wurde die die Hamiltonsche Struktur der Lagrangeschen Methode repräsentierende Verlet-Methode verwendet.

Bei der Initialisierung von numerischen Versuchsaufbauten wurde deutlich, dass bereits die optimale Konfiguration der Masseteilchen (Splines) in Anzahl, Größe oder ihrer q_i -Koordinate ein mathematisches Verfahren ausnutzen musste, da einfache Annahmen oftmals inkonsistent sind und zu Instabilitäten führen. Für die optimale Konfiguration der Massepackchen wurde die Methode des Steilsten Gradienten verwendet.

Das Hauptaugenmerk der Simulationen lag in der Evaluierung der Phasengeschwindigkeit für verschiedene Versuchsaufbauten. Dazu wurden numerische Versuche bei ruhendem Gewässer und bei Anströmgeschwindigkeiten unter der Phasengeschwindigkeit (subkritisches Strömen) und oberhalb der Phasengeschwindigkeit (superkritisches Strömen) durchgeführt.

Die Simulation eines zerfließenden Wasserberges machte die Notwendigkeit der Einführung eines Impulsaustauschparameters δ deutlich, denn einzelne sich bewegende Massesäulen erfuhren solch große Beschleunigungen, dass die Anpassung an das (aktuelle) mittlere Geschwindigkeitsfeld vonnöten war. Insofern wurde durch diesen Parameter sichergestellt, dass der Impuls der beschleunigten Teilchen gleichmäßig, nach der Dichte gewichtet, an alle anderen Teilchen verteilt wurde. Die Untersuchung des Impulsaustauschparameters stellte sich als wesentlicher Bestandteil der erarbeiteten Lösung heraus.

Anschließend wurden Simulationen zu einer sinusförmigen Oberfläche durchgeführt. Mit

Hilfe der iterativen Methode des Steilsten Gradienten wurde die Ausgangskonfiguration der Teilchenschwerpunkte bestimmt, um eine sinusförmige Wasseroberfläche bestmöglich anzunähern.

Es zeigte sich, dass die Struktur der Oberfläche im zeitlichen Verlauf bei identischen Ausgangsgeschwindigkeiten der Massepäckchen erhalten blieb, ihre Amplitude jedoch oszillierte. Zur Initialisierung der Teilchengeschwindigkeiten passend zur Oberflächenstruktur des Wassers wurde wiederum die Methode des Steilsten Gradienten verwendet. Die daraus resultierende zeitliche Entwicklung der Oberfläche zeigte keine signifikanten Oszillationen mehr bezüglich der Amplitude des Signals.

Ferner wurden Strömungen in Kanälen simuliert. Die Experimente bei sub- und superkritischem Überströmen lieferten die erwarteten Ergebnisse. In einer Gegenüberstellung der Ausbreitungsgeschwindigkeiten bei den Versuchen im subkritischen Fall konnten die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der sich nach rechts und links ausbreitenden Wellen den theoretischen Werten mit einer Abweichung von ca. 3 % standhalten. Ebenso konnte bei superkritischem Anströmen eines hohen Berges das Phänomen des Hydraulischen Sprunges simuliert werden. Hierbei wechselt bei subkritischem Anströmen über einer großen Bodenerhebung im Lee des Hindernisses die Strömung zum superkritischen Fließen und springt nach dem Hindernis wieder in subkritisches Fließen zurück.

Die in der Einleitung aufgeworfenen Fragen können somit nun beantwortet werden.

- **Wie lässt sich die Methode der Finiten Massen auf die Flachwassergleichung adaptieren?**

Es wurde gezeigt, dass unter Zuhilfenahme der Konstanz der Dichte des Flachwassersystems sich die Höhe der eindimensionalen Flachwassergleichung auf die FMM-Dichte transformieren ließ. Der zum Erhalt der Bewegungsgleichungen beschrittene Weg ging nicht direkt von der Flachwassergleichung aus, sondern entsprang dem klassischen Lagrangeformalismus.

- **Wie modifiziert eine Bodenstruktur die erhaltenen Bewegungsgleichungen?**

Die wesentliche Änderung bei der Berücksichtigung einer Bodenorografie bestand in der Berechnung der potenziellen Energie der Teilchen und äusserte sich in den Bewegungsgleichungen in Form eines Zusatztermes, der die Wechselwirkung des Dichtefeldes der Massepäckchen mit der Bodenstruktur beinhaltet.

- **Wie genau wird die Phasengeschwindigkeit der Flachwasserwellen wiedergegeben?**

Die durch das Modell wiedergegebene Phasengeschwindigkeit entspricht in sehr guter Näherung den theoretischen Werten. Berücksichtigt man die im Design des Experiments enthaltenen Abweichungen von den Flachwasserbedingungen, so liegen die resultierenden Geschwindigkeiten mit Abweichungen von bestenfalls 0.37% im Rahmen der durch den Versuchsaufbau gegebenen Möglichkeit.

- **Wie verhält sich das Modell im Vergleich mit anderen Modellen?**

Vergleichsläufe in der Simulation „Bodensenke“ des FMM-Modells mit dem MPDATA-Modell lieferten eine gute Übereinstimmung in der Darstellung der Wasseroberfläche. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass das FMM-Modell steilere Gradienten produziert. Dennoch propagieren die Signale beider Modelle mit derselben

Ausbreitungsgeschwindigkeit. Wesentliche Unterschiede ergaben sich in der benötigten Rechenzeit. Hier lag das FMM-Modell um den Faktor 5 höher, eine Eigenschaft, die sich in Zukunft sicherlich durch eine zeitoptimierte Programmierung reduzieren lässt.

- **Bleibt die Energie in der Simulation erhalten?**

Prinzipiell konnte im Experiment gezeigt werden, dass die Energie im System erhalten wird. Jedoch wurde zur Sicherstellung des Impulsaustausches zwischen den Teilchen ein weiterer Parameter eingeführt, der einerseits dem Impulserhaltungssatz genügt, andererseits aber die Energieerhaltung im FMM-System verletzt. Dem System wird durch diesen Impulsaustauschparameter konstant Energie entzogen, welche normalerweise als Wärmeenergie in der Bilanz erscheinen würde, allerdings in der hier verwendeten Berechnung der Gesamtenergie als Summe der potenziellen und der kinetischen Energie nicht berücksichtigt wird. Dieser Fehler äusserst sich jedoch nur in einem Energieverlust von 0.006% im Simulationszeitraum.

- **Gibt es ein Analogon zum CFL-Kriterium, das den Zeitschritt beschränkt?**

Vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet, scheint in erster Linie nichts dagegen zu sprechen, dass der Zeitschritt im Lagrangeschen System limitiert werden müsste. Die Experimente zeigen jedoch, dass ab einer gewissen Größe des Zeitschritts die Resultate immer weiter auseinander liegen, was darauf hindeutet, dass sehr wohl eine maximale Zeitschrittgröße existiert. Bisher konnte nicht genau quantifiziert werden, welche Faktoren dieses Problem beeinflussen. Eine bedeutende Rolle nimmt hierbei sicherlich die Größe der Teilchen λ , bzw. deren Durchmesser ($2 \cdot \lambda$) ein; ebenso besteht die Vermutung, dass die lokale Teilchendichte bzw. die Initialisierungsdichte der Teilchen Δx_{ini} eine maßgebliche Rolle spielt. Vermutlich ist es das Zusammenspiel zwischen den verschiedenen Größen, die den Zeitschritt auf kleiner als $\Delta t = \frac{c}{2(2\lambda)}$ oder $\Delta t = \frac{c}{\Delta x_{ini} \lambda}$ beschränken.

Abschließend ist zu sagen, dass das verwendete Modell den gesetzten Anforderungen entspricht und damit dem Einsatz in einem zweidimensionalen Modell nichts entgegen spricht.

Ausblick:

In dieser Arbeit wurden die Adaption der Methode und die Entwicklung sowie verschiedene Anwendungen des FMM-Modells beschrieben. Wie kann nun die zukünftige Entwicklung aussehen?

Das FMM-Modell in seiner jetzigen Programm-Version stellt natürlich nur ein erstes Grundgerüst dar. Zur zeitlichen Optimierung des Algorithmus sind noch einige Veränderungen im Code notwendig, die jedoch die Wirkungsweise des Modells nicht beeinträchtigen. Abgesehen von weiteren Studien zur Quantifizierung der Limitierung der Zeitschrittgröße, ist der nächste Schritt im Hinblick auf ein zukünftiges atmosphärisches Modell die schrittweise Erweiterung des aktuellen Modells zuerst auf zwei Dimensionen, dann auch mit Coriolis- und Druckgradientkraft. Die Herleitung der Bewegungsgleichungen erfolgt dabei analog zum eindimensionalen Fall. Der Schritt ins Dreidimensionale führt über das Hydrostatische Gleichgewicht und die Thermodynamik. Das Ziel wäre dann der Ausbau zu einem dreidimensionalen Atmosphärenmodell, das die wesentlichen Merkmale der allgemeinen Zirkulation wiedergibt.

Anhang A

Integralberechnung mit Hilfe von Stützstellen

Um die Bewegungsgleichungen (Gl. 3.33 und Gl. 3.39 bzw. Gl. 3.47 und Gl. 3.51) numerisch lösen zu können, müssen zunächst die Integrale diskretisiert werden. Die dazu verwendete Quadraturformel sollte die Lagrangeschen Eigenschaften des Modells repräsentieren. In Gauger et al. (2000) wird ein Verfahren vorgestellt, um die Integrale in den Bewegungsgleichungen über fünf Stützstellen zu berechnen.

Ein Integral über eine skalare Vektorfunktion f , die mit der Massendichte ϱ gewichtet wird, kann man als eine Summe der einzelnen Beiträge der Massenpäckchen schreiben.

$$\int f \varrho dx = \sum_{i=1}^N m_i \int f(q_i + \mathbf{H}_i(t)y) \psi(y) dy \quad (\text{A.1})$$

Wir ersetzen die Integrale durch eine Quadraturformel (mit $g(y) = f(q_i + \mathbf{H}_i(t)y)$)

$$\int g(y) \psi(y) dy \rightarrow \sum_{\nu=1}^5 \alpha_{\nu} g(a_{\nu}), \quad (\text{A.2})$$

mit Gewichten $\alpha_{\nu} > 0$ mit $\nu = 1, \dots, 5$ und Stützstellen a_{ν} , die innerhalb des Definitionsbereichs der Splinefunktion ψ (Gl. 2.8) liegen. Die einzelnen Werte für α_{ν} und a_{ν} sind in Tabelle A.1 angegeben.

Tabelle A.1: Stützstellen der Integralberechnung

a_{ν}	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
α_{ν}	$\frac{41}{1280}$	$\frac{316}{1280}$	$\frac{566}{1280}$	$\frac{316}{1280}$	$\frac{41}{1280}$

Daraus erhält man für das eindimensionale Problem (mit $\mathbf{H}_i(t) = \lambda_i(t)$) als Ersetzungsformel für die Integrale

$$\int f \varrho \, dx \rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \left[\sum_{\nu=1}^5 \alpha_\nu f(q_i + \mathbf{H}_i(t) a_\nu) \right] =: \int f \, d\mu. \quad (\text{A.3})$$

Damit läßt sich z.B. die Bewegungsgleichung in q_i (vgl. Gl. (3.33), wobei $\frac{g}{\bar{\varrho}_{0,2} \lambda_i^2(t)} = cte$ gesetzt wird) mittels Stützstellen ausdrücken:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i(t) &= cte \int \sum_{j=1}^N m_j \frac{1}{\lambda_j(t)} \psi_j \left(\frac{1}{\lambda_j(t)} (x - q_j(t)) \right) \psi'_i \left(\frac{1}{\lambda_i(t)} (x - q_i(t)) \right) dx \\ &= cte \sum_{j=1}^N m_j \int \frac{1}{\lambda_j(t)} \psi_j \left(\frac{1}{\lambda_j(t)} (x - q_j(t)) \right) \psi'_i \left(\frac{1}{\lambda_i(t)} (x - q_i(t)) \right) dx \\ &\quad \text{wobei } y = \frac{1}{\lambda_i} (x - q_i) = \frac{1}{\lambda_i} (\lambda_j y + q_j - q_i) = \frac{\lambda_j}{\lambda_i} y + \frac{1}{\lambda_i} (q_j - q_i) \\ &= cte \sum_{j=1}^N m_j \int \psi_j(y) \underbrace{\psi'_i \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i} y + \frac{1}{\lambda_i} (q_j - q_i) \right)}_{g(y)} dy \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Ersetzt man nun das Integral, so erhält man die auf Stützstellen basierte Differentialgleichung für q_i :

$$\ddot{q}_i = cte \sum_{j=1}^N m_j \sum_{\nu=1}^5 \alpha_\nu \psi'_i \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i} a_\nu + \frac{1}{\lambda_i} (q_j - q_i) \right). \quad (\text{A.5})$$

Anhang B

Impulsaustauschparameter δ : Impulserhaltung

Durch Verwendung des Impulsaustauschparameters δ sollen charakteristische Eigenschaften des Gesamtsystems möglichst nicht verändert, sondern lediglich der Impulsaustausch zwischen den Teilchen ermöglicht werden. Der Impuls muss also vor und nach der Modifikation gleich sein ($k + 1$ stellt den neuen Zeitschritt dar):

$$p_{mod,k+1} = p_{k+1} \quad (\text{B.1})$$

Daraus folgt, da die vorhandene Masse am betrachteten Ort nach der Modifikation dieselbe ist

$$\bar{v}_{mod,k+1} m = \bar{v}_{k+1} m, \quad (\text{B.2})$$

dass sich die Modifikation nur auf die jeweiligen Geschwindigkeiten auswirkt:

$$\bar{v}_{mod,k+1} = \bar{v}_{k+1}. \quad (\text{B.3})$$

Mit den Modifikationen durch den Impulsaustauschparameter δ (vgl. Gln. 3.64 und 3.66) erhält man

$$\dot{q}_{i,mod,k+1} = \dot{q}_{i,k+1} - \delta (\dot{q}_{i,k+1} - \bar{v}_{k+1}) \quad (\text{B.4})$$

und

$$\dot{\lambda}_{i,mod} = \dot{\lambda}_i (1 - \delta) \quad (\text{B.5})$$

und mit

$$\bar{v}_{k+1} = \sum_{i=1}^N \left(\dot{q}_{i,k+1} + \dot{\lambda}_{i,k+1} \frac{1}{\lambda_{i,k+1}} (x - q_{i,k+1}) \right) \frac{\chi_i}{\varrho} \quad (\text{B.6})$$

kann man zeigen, dass der Impuls bzw. die Geschwindigkeit erhalten bleibt:

$$\bar{v}_{mod} = \sum_{i=1}^N \left(\underbrace{\dot{q}_i - \delta(\dot{q}_i - \bar{v})}_{\dot{q}_{i,mod}} + \underbrace{\dot{\lambda}_i(1-\delta)}_{\dot{\lambda}_{i,mod}} \frac{1}{\lambda_i}(x - q_i) \right) \frac{\chi_i}{\varrho} \quad (\text{B.7})$$

$$= \sum_{i=1}^N \left(\underbrace{\dot{q}_i + \dot{\lambda}_i \frac{1}{\lambda_i}(x - q_i)}_{\bar{v}} \right) \frac{\chi_i}{\varrho} + \sum_{i=1}^N \left(\delta\bar{v} - \underbrace{\delta(\dot{q}_i + \dot{\lambda}_i \frac{1}{\lambda_i}(x - q_i))}_{\bar{v}} \right) \frac{\chi_i}{\varrho} \quad (\text{B.8})$$

$$= \bar{v} + \sum_{i=1}^N \left(\underbrace{\delta\bar{v} - \delta\bar{v}}_0 \right) \frac{\chi_i}{\varrho} \quad (\text{B.9})$$

$$= \bar{v} \text{ q.e.d.} \quad (\text{B.10})$$

Anhang C

Methode des Steilsten Gradienten

Da die Ausgangskonfiguration der Teilchen in der Methode der Finiten Massen eine Herausforderung darstellt, wurde zur Festlegung der optimalen Teilchenanfangspositionen auf die Methode des Steilsten Gradienten zurückgegriffen.

Man legt eine Maßzahl G fest, die die Qualität der Repräsentierung der gewünschten Funktion $f(x)$ darstellt, welche im Fall der sinusförmigen Randbedingungen die Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ ist (vgl. Kapitel 4.2.2). Diese Maßzahl wird definiert als das Integral über das Quadrat der Differenz von der Funktion $g(x, \vec{d})$, die man möglichst nahe an $f(x)$ annähern möchte, und der gewünschten Funktion $f(x)$:

$$G = \int (g(x, \vec{d}) - f(x))^2 dx, \quad (\text{C.1})$$

wobei hier d_i die Position des i -ten Teilchens zum Zeitpunkt $t_0 = 0.00$ s ist. Der Gradient der Maßzahl G zeigt in die Richtung der steilsten Änderung

$$\left(\frac{\partial}{\partial d_1} G, \dots, \frac{\partial}{\partial d_N} G \right) = \nabla_{\vec{d}} G. \quad (\text{C.2})$$

Berechnet wird also für jedes Teilchen die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial d_i} G = \int 2(g(x, \vec{d}) - f(x)) dx. \quad (\text{C.3})$$

Das Iterationsverfahren zur Berechnung der Teilchenpositionen startet mit einer Gleichverteilung der d_i . Im nächsten Schritt wird der Gradient $\nabla_{\vec{d}} G$ über Gl. (C.3) berechnet und man erhält damit die neuen Ausgangspositionen der Teilchen durch die Modifizierung

$$\vec{d}_{neu} = \vec{d} - \mu \nabla_{\vec{d}} G. \quad (\text{C.4})$$

μ stellt hierbei einen Faktor dar, der in der Größenordnung $\mu = 0.001$ liegt. Mit diesen neuen Teilchenpositionen \vec{d}_{neu} wird nun die Zielfunktion berechnet, wobei die Iteration abgebrochen wird, sobald sich die neue Zielfunktion nur unwesentlich von der alten unterscheidet:

$$|Z(\vec{d}_{neu}) - Z(\vec{d})| < \epsilon. \quad (\text{C.5})$$

Sollte dieser Wert noch nicht unterschritten sein, so beginnt der neue Iterationsschritt mit der Berechnung des Gradienten $\nabla_{\vec{d}} G$.

Abkürzungen & Symbole

α_ν	Gewicht der Stützstelle ν
a_ν	Stützstelle ν
ATTILA	Atmospheric Tracer Transport In a LAgrangian model
CCM	Chemistry Climate Model
CFL-Kriterium	Courant–Friedrichs–Lewy–Kriterium
c	Phasengeschwindigkeit der Flachwasserwelle
χ_i	Massenanteil des Masseteilchens i
δ	Impulsaustauschparameter
$\tilde{\delta}$	modifizierter Impulsaustauschparameter
D	durchschnittliche Wasserhöhe
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
ϵ_{pot}	potentielle Energiedichte
ECHAM	Modell des ECMWF, HAMburger Version
E_{kin}	kinetische Energie
$E_{kin,i}$	kinetische Energie eines Masseteilchens i
E_{pot}	potentielle Energie
E_{ges}	Gesamtenergie
ECMWF	European Centre for Medium-Range Weather Forecasts
f	Coriolisparameter
FEM	Finite Element Method (dt. Methode der Finiten Elemente)
FMM	Finite Mass Method (dt. Methode der Finiten Massen)
FVM	Finite Volume Methode (dt. Methode der Finiten Volumen)
FWG	Flachwassergleichungen (vgl. SWE)
g	Erdbeschleunigung
GCM	General Circulation Model
h	Wasserhöhe
h_B	Höhe der Bodenstruktur (Orografie)
h_S	Amplitude des Signals

H	Höhe der Wassersäule
$\mathbf{H}_i(t)$	Verformungsmatrix des Teilchens i
\vec{j}	Massenfluss
J	Trägheitsmoment
λ_i	Größe des Masseteilchens i
L	Beckenlänge
L_c	charakteristische Länge eines Signals
\mathcal{L}	Lagrangefunktion
m_i	Masse des Masseteilchens i
M	Gesamtmasse
MESSy	Modular Earth Submodel System
MPDATA	Multidimensional Positive Definite Advection Transport Algorithm
N	Teilchenanzahl
$\tilde{\psi}$	Masseverteilung beschreibende Formfunktion (Spline) in einer Dimension
ψ	Masseverteilung beschreibende Formfunktion
q_i	Schwerpunktskoordinate des Masseteilchens i
$\varrho(x, t)$	Gesamtdichte in der FMM
$\tilde{\varrho}_{0,2}$	Dichte des Mediums, hier: Wasserdichte (konstant)
SLT	Semi-Lagrangescher Transport
SWE	Shallow Water Equations (vgl. FWG)
t	Zeit
Δt	Zeitschritt
\bar{u}	mittlere Flussgeschwindigkeit
\bar{v}	Geschwindigkeitsfeld
v_i	Geschwindigkeit des Massepäckchens i
v_{exp}	experimentell ermittelter Wert der Phasengeschwindigkeit
v_{theo}	theoretischer Wert der Phasengeschwindigkeit
WMO	World Meteorological Organization
\vec{x}	Vektor im Ortsraum
\vec{y}	zeitunabhängiger Vektor im Körperkoordinatensystem eines Masseteilchens

Abbildungsverzeichnis

2.1	Darstellung der Splinefunktion	8
2.2	Teilchenaufbau	8
3.1	Aufbau des Flachwassersystems	13
3.2	Visualisierung	18
3.3	Anfangszustand eines Masseteilchens	25
3.4	Beschleunigung bei einem Teilchen	25
3.5	$\ddot{\lambda}_i$ eines Masseteilchens	26
3.6	Anfangszustand der zwei Teilchen	27
3.7	Zerfließen der zwei Teilchen	28
3.8	Beschleunigung q_2	28
3.9	$\ddot{\lambda}_2$ eines Teilchens	29
3.10	Oszillation von λ	30
3.11	Teilchen unter Einfluss der Orografie	31
3.12	Beschleunigung durch Orografie	32
3.13	Beschleunigung von λ durch Orografie	32
3.14	Größenänderung von λ mit und ohne Orografie	33
3.15	Ideales λ	35
4.1	Versuchaufbau	41
4.2	Initialisierung des Zerfließens	42
4.3	Zerfließen	42
4.4	Zerfließen im Becken	43
4.5	Impulsaustauschparameter δ	44
4.6	Energieverlauf	45
4.7	Zeitschritt Δt	46
4.8	Gesamtenergieverlauf: Zeitschrittabhängigkeit	47
4.9	Gesamtenergieverlauf: zoom	47
4.10	Verlauf der kinetischen Energie	48
4.11	Verlauf der potentiellen Energie	48
4.12	Verlauf der potentiellen Energie: zoom	49
4.13	Konsistenz im Zeitschritt	49
4.14	Phasengeschwindigkeit	51
4.15	Sinusförmige Oberfläche: $v_0 = 0$	53
4.16	Sinusförmige Oberfläche: $v_0 = 60$	53
4.17	Bodensenke	54
4.18	MPDATA vs. FMM	55
4.19	MPDATA vs. FMM II	55

4.20 Subkritischer Fluß	56
4.21 Subkritischer Fluß: Ausbreitungsgeschwindigkeit	57
4.22 Superkritischer Fluß	58
4.23 Hydraulischer Sprung	59
4.24 Hydraulischer Sprung: Geschwindigkeitsverlauf	59

Tabellenverzeichnis

4.1	Konsistenz: Phasengeschwindigkeiten	50
4.2	Theoretisch und experimentell ermittelte Phasengeschwindigkeiten	52
A.1	Stützstellen der Integralberechnung	67

Literaturverzeichnis

- BRONSTEIN, I. N. und SEMENDJAJEW, K. A., 1991: *Taschenbuch der Mathematik*, number 25, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart / Leipzig.
- CASSIRER, K., HESS, R., JABLONOWSKI, C. und JOPPICH, W., 1992: The shallow water test cases for a global model with documentation of the results, GMD - Forschungszentrum Informationstechnik GmbH, Arbeitspapier 999, 85 pp., Sankt Augustin, Germany.
- CHEN, M. und BATES, J. R., 1996: Forecasts experiments with a global finite-difference semi-lagrangian model, *Monthly Weather Review* **124**, 1992–2007.
- CHEN, M., ROOD, R. B. und TAKACS, L. L., 1997: Impact of a semi-lagrangian and an eulerian dynamical core on climate simulations, *Journal of Climate* **10**, 2374–2389.
- COURANT, R., FRIEDRICHS, K. und LEWY, H., 1928: Über die partiellen differenzengleichungen der mathematischen Physik, *Mathematische Annalen* **100**, 32–74.
- CULLEN, M. J. P., 1974: Integration of the primitive barotropic equations on a sphere using the finite element method, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **100**.
- DRITSCHEL, D. G., POLVANI, L. M. und MOHEBALHOJEH, A. R., 1999: The contour-advective semi-lagrangian algorithm for the shallow water equations, *Mon. Wea. Rev.* **127**, 1151–1165.
- DUTTON, J. A., 1976: *The Ceaseless Wind. An introduction to the theory of atmospheric motion*, McGraw-Hill.
- ECMWF SEMINAR PROCEEDINGS, 2004: Recent developments in numerical methods for atmosphere and ocean modelling; 6-10 September 2004, Europäisches Zentrum für mittelfristige Wettervorhersage (ECMWF), Reading, UK.
- ELIASSEN, A. und PALM, E., 1961: On the transfer of energy in stationary mountain waves, *Geof. Publ.* **22**(3), 1–31.
- ETTLING, D., 1996: *Theoretische Meteorologie*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.
- FABIAN, P., 1992: *Atmosphäre und Umwelt*, Springer, Berlin.
- GAUGER, C., 2000: *Erweiterungen der Methode der Finiten Massen*, Dissertation, Eberhard-Karls-Universität Tübingen.
- GAUGER, C., LEINEN, P. und YSERENTANT, H., 2000: The finite mass method, *SIAM J. Numer. Anal.* **37**, 1768–1799.

- HOLTON, J. R., 1992: *An Introduction to Dynamic Meteorology*, Academic Press, San Diego, USA.
- JABLONOWSKI, C., 1998: *Test of the Dynamics of two global Weather Prediction Models of the German Weather Service: The Held-Suarez Test*, Dissertation, Universität Bonn.
- JAKOB, R., HACK, J. J. und WILLIAMSON, D. L., 1993: Solutions to the Shallow Water Test Set using the spectral transform method, *Technical Report NCAR Technical note, NCAR/TN-388+STR*, NCAR, Boulder, Colorado.
- JÖCKEL, P., SANDER, R. und LELIEVELD, J., 2004: Technical note: The modular earth submodel system (MESSy) - a new approach towards earth system modeling, *Atmos. Chem. Phys. Discuss.* **4**, 7139–7166.
- KAAS, E., GULDBERG, A. und LOPEZ, P., 1997: A Lagrangian Advection Scheme Using Tracer Points, *Atmosphere-Ocean* pp. 171–194.
- KLINGLER, M., 2003: *Die Methode der Finiten Massen in der astrophysikalischen Hydrodynamik*, Dissertation, Fakultät für Mathematik und Physik, Eberhard–Karls–Universität Tübingen.
- LANDAU, L. D. und LIFSCHITZ, E., 1974: *Lehrbuch der Theoretischen Physik VI: Hydrodynamik*, Akademie Verlag/Berlin.
- LANDAU, L. D. und LIFSCHITZ, E., 1981: *Lehrbuch der Theoretischen Physik I: Mechanik*, Akademie Verlag/Berlin.
- LANGE, H.-J., 2002: *Die Physik des Wetters und des Klimas*, Dietrich Reimer Verlag Berlin.
- LANGMANN, C., 2004: *Oberflächenspannung in der Methode der Finiten Massen*, Dissertation, Fakultät für Mathematik und Physik, Eberhard–Karls–Universität Tübingen.
- LILJEQUIST, G. H. und CEHAK, K., 1994: *Allgemeine Meteorologie*, 3 Aufl., Vieweg.
- LIN, S.-J. und ROOD, R., 1996: Multidimensional flux-form semi-lagrangian transport schemes, *Mon. Wea. Rev.* **124**, 2046–2070.
- LIN, S.-J. und ROOD, R., 1997: An explicit flux-form semi-lagrangian shallow water on the sphere., *Q. J. R. Met. Soc.* **123**, 2477–2498.
- LOPEZ, P., KAAS, E. und GULDBERG, A., 1998: The Full Particle-In-Cell advection scheme in spherical geometry, *Technical Report DMI Scientific Report 98-9*, Danish Meteorological Institute.
- MCKENNA, D. S., KONOPKA, P., GROOSS, J., GÜNTHER, G., MÜLLER, R., SPANG, R., OFFERMANN, D. und ORSOLINI, Y., 2002: A new Chemical Lagrangian Model of the Stratosphere (CLaMS). 1. Formulation of advection and mixing, *Journal of Geophysical Research* **107**.
- MOHEBALHOJEH, A. R. und DRITSCHEL, D. G., 2001: Hierarchies of balance conditions for the f-plane shallow water equations, *J. Atmos. Sci.* **58**, 2411–2426.
- PEDLOSKY, J., 1979: *Geophysical Fluid Dynamics*, 2 Aufl., Springer.

- PROMET, 2002: *Klimamodelle I*, Vol. 28, Meteorologische Fortbildungszeitschrift des Deutschen Wetterdienstes (DWD).
- PROMET, 2003: *Klimamodelle II*, Vol. 29, Meteorologische Fortbildungszeitschrift des Deutschen Wetterdienstes (DWD).
- PROMET, 2004: *Klimamodelle III*, Vol. 30, Meteorologische Fortbildungszeitschrift des Deutschen Wetterdienstes (DWD).
- REITHMEIER, C., 2001: *Untersuchungen zum globalen Spurenstofftransport und Stratosphären-Troposphären-Austausch mit dem Lagrangeschen Modell ECHAM4/ATTILA*, Dissertation, Fakultät für Physik, Ludwig-Maximilians-Universität München, DRL Forschungsbericht 2001-09, ISSN 1434-8454, Köln.
- REITHMEIER, C. und SAUSEN, R., 2002: ATTILA: Atmospheric Tracer Transport in a Lagrangian Model, *Tellus (B)* **54**, 278–299.
- ROECKNER, E., ARPE, K., BENGTTSSON, L., CHRISTOPH, M., CLAUSSEN, M., DÜMENIL, L., ESCH, M., GIORGETTA, M., SCHLESE, U., und SCHULZWEIDA, U., 1996: The atmospheric general circulation model ECHAM-4 : Model description and simulation of present-day climate, *Technical Report 218*, ISSN 0937-1060, Max Planck Institut für Meteorologie, Hamburg.
- SADOURNY, R., 1975: The dynamics of finite difference models of the shallow water equations, *J. of Atmos. Sci.* **32**, 680–689.
- SAUTTER, G., 2004: *Schallausbreitung in der Methode der Finiten Massen*, Dissertation, Fakultät für Mathematik und Physik, Eberhard-Karls-Universität Tübingen.
- SMITH, R. B., 1989: Hydrostatic airflow over mountains, *Adv. geophys.* **31**, 1–41.
- SMOLARKIEWICZ, P. K., 1983: A simple positive definite advection scheme with small implicit diffusion, *Mon. Wea. Rev.* **111**.
- SMOLARKIEWICZ, P. K., 1990: A fully multidimensional positive definite advection transport algorithm with small implicit diffusion, *J. of Comp. Physics* **86**.
- SMOLARKIEWICZ, P. K. und MARGOLIN, L. G., 1998: MPDATA: A finite-difference solver for geophysical flows, *J. of Comp. Physics* **140**, 495–480.
- SOMMERFELD, A., 1962: *Vorlesungen über theoretische Physik I: Mechanik*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig/Leipzig.
- STENKE, A., 2005: *Stratosphärischer Wasserdampf in einem gekoppelten Klima-Chemie-Modell: Simulation, Trends und Bedeutung für die Ozonchemie*, Dissertation, Fakultät für Physik, Ludwig-Maximilians-Universität München.
- STEVENSON, D., COLLINS, W., JOHNSON, C. und DERWENT, R., 1998: Intercomparison and evaluation of atmospheric transport in a lagrangian model (STOCHEM), and an eulerian model (UM), using ^{222}Rn as a short-lived tracer, *Q. J. R. Met. Soc.* .
- TRAUB, M. A., 2004: *Lagrangian transport evaluation of atmospheric chemistry in the Mediterranean region*, Dissertation, Johannes-Gutenberg-Universität Mainz.

- WASHINGTON, W. M. und PARKINSON, C. L., 1986: *An Introduction to Three-Dimensional Climate Modeling*, Oxford University Press Oxford/New York.
- WILLIAMSON, D. L., DRAKE, J. B., HACK, J. J., JAKOB, R. und SWARZTRAUBER, P. N., 1992: A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry, *J. Comput. Phys.* **102**, 211–224.
- WILLIAMSON, D. L., OLSON, J. G. und BOVILLE, B. A., 1998: A comparison of semi-lagrangian and eulerian tropical climate simulations, *Monthly Weather Review* **126**, 1001–1012.
- YSERENTANT, H., 1997: A particle model of compressible fluids, *Numer. Math.* **76**, 111–142.
- YSERENTANT, H., 1999a: Entropy generation and shock resolution in the particle model of compressive fluids, *Numer. Math.* **82**, 161–177.
- YSERENTANT, H., 1999b: Particles of variable size, *Numer. Math.* **82**, 143–159.
- YSERENTANT, H., 2000: A convergence analysis for the finite mass method for flows in external force and velocity fields, SFB-Report Nr.136, SFB 382, Eberhard-Karls-Universität Tübingen.
- YSERENTANT, H., 2002: The convergence of the finite mass method for flows in given force and velocity fields, In 'Meshfree Methods for Partial Differential equations': Comput. Sci.Eng.26, 419–440, Springer.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Prof. Dr. Robert Sausen für die Betreuung und Begutachtung dieser Arbeit sowie die freundliche Aufnahme in die Abteilung 1 im Jahre 2003 bedanken. Ebenfalls bedanken möchte ich mich bei Priv.-Doz. Dr. Harry Weber-Philipp für die Begutachtung dieser Arbeit.

Ein ganz besonderer Dank gebührt Volker Grewe, der durch die Diskussionen, Betreuung und Zusammenarbeit in den letzten drei Jahren einen großen Anteil am Gelingen dieser Arbeit hat.

Ein weiterer Dank gilt Andreas Dörnbrack, der mir freundlicherweise MPDATA beschaffte und mit praktischem Rat zu Seite stand. Ebenso möchte ich Nils Wedi danken, der die verwendete Programmversion zur Verfügung stellte.

Ein besonderer Dank gilt meinem Zimmerkollegen Rudolph Deckert für die Geduld mit mir und meinem Chaos.

Ferner möchte ich mich bei einer Reihe von Personen bedanken, ohne die diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre: Peter Spichtinger, Christian Kurz, Axel Lauer, Andrea Stenke, Sigrun Matthes, Winfried Beer, Jens Grenzhäuser, Christine Fichter, Johannes Hendricks, Klaus Gierens, Michael Ponater & Martin Dameris und natürlich Prof. Dr. Harry Yserentant.

Ein großer Dank gebührt meinem ehemaligen Studienkollegen Dipl.-Phys. Nikolai Waigand für die unermüdliche Korrekturlesearbeit und Umformulierungshilfe in den vergangenen Monaten.

Ferner möchte ich mich bei allen Mitgliedern des DLR-Instituts für Physik der Atmosphäre und im speziellen der Abteilung 1 bedanken, die mir immer freundlich, mit Rat und auch konstruktiver Kritik zur Seite standen.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Gabriele Veronika Erhardt
geboren am	16. August 1972
in	Stuttgart
Familienstand	ledig

Schulbildung

1979 – 1983	Grundschule Sillenbuch, Stuttgart
1983 – 1989	Geschwister-Scholl-Gymnasium Stuttgart-Sillenbuch, Stuttgart
1989 – 1990	Colegio y Liceo Aleman habilitado, Montevideo / Uruguay
1990 – 1992	Geschwister-Scholl-Gymnasium Stuttgart-Sillenbuch, Stuttgart
Mai 1992	Abitur

Studium

1992 – 1995	Studium der Physik an der Universität Ulm
September 1995	Vordiplom
1995 – 1996	ERASMUS-Stipendium: Studium der Physik an der Universidad de Valencia / Spanien
1996 – 2002	Studium der Physik an der Universität Ulm
Juli 2002	Diplom in Physik, Thema der Diplomarbeit: <i>Modellierung und Klassifikation anomaler Diffusionsprozesse</i>
2003 – 2006	Promotionsstudium der Meteorologie an der Ludwig-Maximilians-Universität München
2003 – 2007	Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Physik der Atmosphäre, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V., Oberpfaffenhofen